Europäische Talentakademie Lindau 2011

Kurs 2

Spieltheorie

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 3
Matrizen Spiele 3
Die Matrix 3
Nullsummenspiele 3
Allgemeine Spiele 8
Weltretten 8
Kuchenteilen 8
Schokolade 8
Efronsche Würfel 8
Fishbanks-Spiel 8
Versteigerung eines Euros 9
Panikspiel 9
Wippe 9
Chicken Game 9
Schluss 12

Einleitung

Am 28 Mai 2011 trafen sich 60 junge Talente zum ersten Mal am Bodensee in Lindau und schon waren die restlichen 48 Teilnehmer auf die zwölf Spieltheoretiker neidisch. Wurden sie zunächst auch wegen Aussicht auf trockene Mathematik mitleidig belächelt, so mussten die anderen zu ihrer Verwunderung feststellen, dass Spieltheorie in erster Linie sehr viel Spaß macht. So kann man zum Beispiel mithilfe eines Kuchens wichtige politische und wirtschaftliche Probleme darstellen und sie anschließend ganz einfach durch Verspeisen des Kuchens lösen. Außerdem lernten die „Zocker“ die optische Schönheit des Go-Spiels kennen. Bei diesem alten, japanischen Brettspiel geht es darum, die Steine des Gegners einzukesseln. Da es ein Spiel mit perfekter Information ist, ergibt sich die Komplexität des Spiels nur aus der Vielfalt der kombinatorischen Möglichkeiten, ähnlich wie bei Schach, und dennoch folgt auf jeden Spielzug genau ein rationaler Gegenzug. Durch das Antrainieren dieser rationalen Denkweise gelang es ihnen letzten Endes sogar die Welt zu retten.

Matrizen Spiele

Die Matrix

Die Matrix ist ein Hilfsmittel, um Spiele aller Art mathematisch zu beschreiben und zu untersuchen. Sie ist folgendermaßen aufgebaut:

		Spieler B	
		Strategie 1	Strategie 2
Spieler A	Strategie 1	X,Y	X,Y
	Strategie 2	X,Y	X,Y

An diesem Beispiel wollen wir die wichtigsten Begriffe erklären.
Bei diesem Spiel stehen zwei Spieler gegenüber.
Sie haben jeweils die Möglichkeit, entweder Strategie 1 oder Strategie 2 zu wählen.
Je nach gewählten Strategien bekommt Spieler A den Gewinn bzw. Verlust X und Spieler B den Gewinn bzw. Verlust Y.

Je nach Anzahl der Spieler muss die Dimension der Matrix angepasst werden. Bei zwei Spielern hat man also eine zweidimensionale Matrix (s. oben), bei drei Spielern eine dreidimensionale usw. Matrizen ab vier Spielern sind also nur theoretisch realisierbar.

Nullsummenspiele

Unter einem Nullsummenspiel versteht man ein Spiel, bei dem der Gewinn des einen Spielers genauso hoch wie der Verlust des anderen ist.

<u>Spiel 1: Gefangenendilemma</u> <u>(Prisoners´ Dilemma)</u>

Das Gefangenendilemma wurde in den 50ern von der Rand Corporation zum ersten Mal genauer untersucht. Die Rahmengeschichte dazu lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Zwei Männer begehen einen Raubüberfall, werden jedoch gefasst. Sie werden gleichzeitig getrennt voneinander befragt. Der leitende Kommissar macht beiden das gleiche Angebot. Entweder, sie schweigen und geben ihren Überfall nicht zu, oder sie sind geständig und beschuldigen den jeweils anderen. Daraus ergeben sich 3 Möglichkeiten:

Beide sind geständig und beschuldigen sich gegenseitig (beide gehen 4 Jahre ins Gefängnis).

Beide schweigen (und müssen 2 Jahre wegen illegalen Waffenbesitzes ins Gefängnis, der Überfall kann ihnen dann nicht nachgewiesen werden).

Einer schweigt, der andere ist geständig (Der Geständige bekommt wegen seiner Ehrlichkeit Freispruch, während der andere 5 Jahre hinter Gitter wandert.)

Beide wollen natürlich möglichst wenig Jahre im Gefängnis verbringen. Was sollen sie also tun?

Um diese Frage zu klären, wurde folgende Matrix erstellt:

(Die Zahlen in den Feldern stehen für die Jahre, die der Spieler als Strafe erhält. Spieler A steht vor dem Strichpunkt, B dahinter.)

		Spieler B	
		Verpfeifen	Schweigen
Spieler A	Verpfeifen	4; 4	0; 5
	Schweigen	5; 0	2; 2

Wir beginnen im Feld „2; 2“. Jetzt könnte Spieler A die Strategie zu seinem Vorteil wechseln, und zwar in dem er B verpfeift („0; 5“; siehe roter Pfeil). Jetzt will Spieler B seine Strategie ändern, und zwar will auch er jetzt gestehen. Dadurch landen beide mit ihren Entscheidungen auf dem Feld „4; 4“ (siehe blauer Pfeil).

Man erkennt, dass es für beide am klügsten wäre, zu schweigen.

Für den Einzelnen wäre es am besten, den anderen zu verpfeifen, und als freier Mann aus dem Verhör zu kommen. Dies setzt jedoch voraus, dass sein Komplize schweigt.

Da jedoch keiner das Risiko eingehen will, sich auf das Schweigen seines Komplizen zu verlassen, gestehen beide und gehen vier Jahre ins Gefängnis.

Dass diese Geschichte zwangsläufig auf diese Entscheidung hinausläuft, kann man durch das sog. Nash-Gleichgewicht beweisen.

Der Mathematiker John Forbes Nash hat bewiesen, dass es bei jedem Spiel, bei dem man nicht weiß, was der andere Spieler wählt, einen Punkt in der Matrix gibt, auf den alle Entscheidungen hinauslaufen. Dazu zeichnet man in der Matrix Pfeile ein.

		Spieler B	
		Verpfeifen	Schweigen
Spieler A	Verpfeifen	4; 4	0; 5
	Schweigen	5; 0	2; 2

Jetzt will niemand mehr seine Strategie wechseln, da sich dann seine Situation verschlechtert. Beide sind beim Nash-Gleichgewicht angelangt.

Dieses Verfahren kann auf jede Matrix angewendet werden.

<u>Spiel 2: Münzspiel nach Montmor</u>

Spieler A hält eine Münze hinter seinem Rücken. Spieler B weiß natürlich nicht, in welcher Hand. Nun muss Spieler B erraten, in welcher Hand die Münze versteckt ist. Dabei gelten folgende Regeln:

Ist die Münze in der rechten Hand, und Spieler B errät dies, so bekommt er 2 Punkte und Spieler A verliert 2 Punkte.

Ist die Münze in der linken Hand, und Spieler B errät dies, so bekommt er 1 Punkt und Spieler A verliert einen Punkt.

Errät Spieler B nicht, in welcher Hand Spieler A die Münze versteckt hält, so bekommt bzw. verliert niemand einen Punkt.

Die Matrix hierzu sieht dann folgendermaßen aus:

		Spieler B	
		Rechts (β)	Links ($1-\beta$)
Spieler A	Rechts (α)	-2; 2	0; 0
	Links ($1-\alpha$)	0; 0	-1; 1

Erneut stellt sich die Frage, was die Spieler tun sollen. Dies kann hierbei nicht durch das Einzeichnen von Pfeilen herausgefunden werden. Wir müssen ein neues Hilfsmittel einführen: den Erwartungswert. Mit dem Erwartungswert lässt sich der mittlere Gewinn bei einem Spiel ausrechnen.

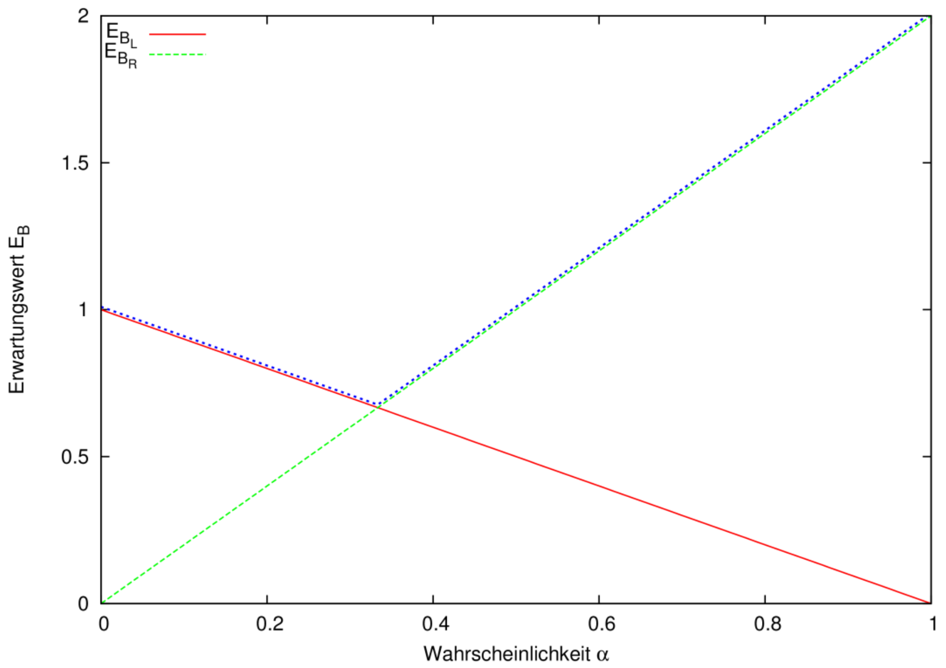
Den Erwartungswert kann man folgendermaßen berechnen:

E B (rechts)= 2α

E A (links) =1-α

Man rechnet also den möglichen Gewinn einer Strategie mal seine Wahrscheinlichkeit.

Nun lassen sich diese Terme als Graphen darstellen. Auf der x-Achse trägt man α an, auf der y-Achse den Erwartungswert für Spieler B.



Ein rational denkender Spieler B wird bis zum Schnittpunkt der beiden Geraden immer „links“ spielen, da der Erwartungswert für die Strategie „links“ bis zum Schnittpunkt immer höher ist, als der der Strategie „rechts“. Ab dem Schnittpunkt wird er also immer „rechts“ spielen.

Der ebenfalls logisch denkende Spieler A wird versuchen, den Erwartungswert und damit den Gewinn des Spielers B so gering wie möglich zu halten. Dies ist der Fall, wenn sich die Graphen schneiden. Um nun den x-Wert des Schnittpunkts auszurechnen setzt man die beiden Geradengleichungen gleich: $2\alpha = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$.

Der Spieler A wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von ⅓ „rechts“ nehmen. B wird sich nach A richten und daher auch mit einer Wahrscheinlichkeit von ⅓ „rechts“ nehmen.

Spiel 3: Schwarzfahren

Im Folgenden wollen wir ausrechnen, ob sich das Schwarzfahren in der Straßenbahn in München lohnt. Dazu werden folgende Annahmen gemacht:

-Eine Fahrkarte kostet 2€.

-Wenn man beim Schwarzfahren erwischt wird, zahlt man 40€.

-Eine vom Kontrolleur durchgeführte Kontrolle kostet die Bahn 1€.

		Bahn	
		Keine Kontrolle (β)	Kontrolle ($1-\beta$)
Passagier	Fahrkarte (α)	-2; 2	-2; 1
	Schwarzfahren ($1-\alpha$)	0; 0	-40; 39

Wieder wird mit den Erwartungswerten gerechnet.

E A (Fahrkarte)= $-2\beta-2(1-\beta) = -2$

E A (Schwarzfahren)= $0\beta-40(1-\beta) = -40+40\beta$

Gleichsetzen: $-2=-40+40\beta \Rightarrow \beta= 38/40$

Das heißt, die Bahn muss in 38 von 40 Fällen nicht kontrollieren.

E B (keine Kontrolle) = $2\alpha+0(1-\alpha) = 2\alpha$

E B (Kontrolle) = $\alpha+39(1-\alpha) = -38\alpha+39$

Gleichsetzen: $2\alpha= -38\alpha+39 \Rightarrow \alpha = 39/40$

Dass heißt, man sollte in 39 von 40 Fällen eine Fahrkarte kaufen.

Allgemeine Spiele

Weltretten

Die Spieltheorie hat aber noch viel mehr zu bieten. So wurden uns die Grundlagen der rationalen Entscheidungsfindung in verschiedenen kleinen Spielen vermittelt. Ein Beispiel dafür ist das Retten der Welt: Ein Hullahoop-Reifen symbolisiert die CO_2 -Konzentration in der Erdatmosphäre, eine Person in der Mitte des Reifens– die Welt. Nun müssen außenstehende Menschen einen Finger unter dem Reifen halten, und ohne den Kontakt zu verlieren den Reifen zu Boden bringen. Die Erfahrung zeigt, dass je mehr Menschen am Spiel beteiligt sind, desto unwahrscheinlicher es ist, dass die Aufgabe gelöst wird. So wirkt also jeder Spieler seinem eigentlichen Ziel entgegen, sodass am Ende der Reifen nur noch in die Höhe geht. Durch dieses Spiel wird gezeigt, dass die Anzahl der Teilnehmer sogar bei einfachen Problemen einen entscheidenden Einfluss auf den Ausgang des Spiels haben.

Kuchenteilen

Um die von der Mathematik ausgelösten Depressionen zu lindern, brachte uns Gerd einen Kuchen mit. Doch die Freude war nur von kurzer Dauer, denn dahinter war mal wieder eine listige Aufgabe versteckt. Denn der Kuchen durfte nicht einfach nur gegessen, sondern musste fair geteilt werden. Zunächst versetzten wir uns in die Lage eines „Diktators“, der den Kuchen nach seinem Belieben in zwei Stücke teilen sollte. Jedoch musste er dabei beachten, dass ein weiterer Mitspieler entscheiden konnte, ob dieser das ihm vom Diktator angebotene Stück annimmt, oder es ablehnt. Im ersten Fall bekommen beide ihr Kuchenstück, im zweiten Fall gehen Diktator wie auch Mitspieler leer aus. Hier besteht das Problem darin, dass ein rational denkender Mensch jedes noch so kleine Stück annehmen würde. In der Realität sieht das allerdings anders aus: je kleiner das Stück, desto unzufriedener ist der Spieler und desto geringer die Wahrscheinlichkeit, dass er es annimmt. Dies führte in der Geschichte schon öfter zu Rebellionen. Analog dazu stand auch die Frage, wie man einen Kuchen unter drei Personen gerecht aufteilt. Dieses Problem hat uns sehr lange beschäftigt. Die Lösung dazu ist aber genauso genial wie einfach. Man reduziert die drei Personen auf zwei, die jeweils eine Hälfte des Kuchens in drei Stücke teilen. Die dritte Person darf sich anschließend je ein Stück aus den beiden Hälften aussuchen; die beiden anderen Stücke verbleiben bei der Person, die die jeweilige Hälfte aufgeteilt hat. Das Ganze lässt sich auf n Personen übertragen.

Schokolade

Der Kuchen war aber nicht das einzige Erfreuliche, Gerd hat uns außerdem mit einer Tafel Schokolade gelockt. Jedoch gab es wieder mal einen Haken, denn ein Stück war „vergiftet“. Nun mussten sich zwei Spieler abwechselnd eines oder mehrere Stücke von einer Ecke aus abbrechen. Der, der das „vergiftete“ Stück erwischt – verliert.

Efronsche Würfel

Ein wesentlicher Bestandteil der Spieltheorie besteht allerdings darin, Menschen die nicht die entsprechenden Kenntnisse besitzen, Geld abzuzocken. Dies funktionierte besonders gut mit den sogenannten „Efronschen Würfeln“. Der Trick bestand darin, dass unter vier präparierten Würfeln es immer einen Würfel gibt, der stets eine höhere Augenzahl als ein anderer liefert. Der eingeweihte „Spieltheoretiker“ muss nur den Mitspieler seinen Würfel als Erster wählen lassen. Dann nimmt er jeweils den „komplementären Gewinnerwürfel“.

Fishbanks-Spiel

Ein Highlight der Akademie war das sogenannte Fishbanks-Spiel. Dabei hatten die Teilnehmer die Möglichkeit, sich in wirtschaftlichem Handeln zu versuchen. Jede Gruppe von Spielern hatte zu

Anfang eine bestimmte Anzahl an Schiffen und ein Startkapital. Das Ziel war es durch geschicktes „fischen" den Gewinn zu maximieren. Allerdings war zu beachten, dass der Fischbestand im Meer nicht unbegrenzt war und schnell leergefischt werden konnte, wenn den Fischen nicht genug Regenerationszeit gelassen wurde. Unsere Erfahrung zeigte, dass jedes Team nur auf seinen Profit ausgerichtet war und der Fischbestand deshalb nach kurzer Zeit dramatisch schrumpfte und letztendlich war die See leer gefischt.

Hätten sich die Gruppen untereinander abgesprochen, so hätten sie ihren Gewinn dauerhaft maximieren können.

Versteigerung eines Euros

Selbst von Klaus Abzocke blieben die Kursteilnehmer nicht verschont. So dachte er sich immer wieder Spiele aus, mit denen er uns um unser Geld gebracht hat. So ließ er uns beispielsweise für einen Euro bieten. Durch mangelnde Konzentration der Teilnehmer verloren diese Unsummen. Hätten sich diese jedoch angesprochen und darauf geeinigt nicht mitzubieten, wäre Klaus Geschäftsidee den Bach runtergegangen.

Panikspiel

Dass das Ergebnis eines Spiels oft an der Zusammenarbeit der Teilnehmer hängt zeigt auch das sog. Panikspiel. Jeder Spieler hat einen Faden in der Hand mit einem Gewicht am anderen Ende, das in einem Erlen-Meyer-Kolben liegt. Das Ziel ist, seinen Faden als erster aus dem Kolben zu ziehen. Da jeder gewinnen möchte, ziehen alle Spieler gleichzeitig und die Gewichte verhaken sich im Hals des Kolben. Somit gewinnt keiner der Spieler.

Das Ganze lässt sich beispielsweise auf die Geschehnisse der Love Parade übertragen.

Wippe

Für die „Spielkinder" hatten Gerd und Klaus sogar eine Wippe parat. Wie gewohnt war dies mit einer Aufgabe verknüpft. Unter den beiden Enden standen zwei Joghurtbecher. Die Spieler mussten nacheinander auf die Wippe steigen, bis sich alle auf der Wippe befunden haben. Die Joghurtbecher durften dabei nicht zerdrückt werden.

Chicken Game

Eines der bekanntesten Probleme der Spieltheorie – das so genannte Chicken Game, stammt aus dem Film „Denn sie wissen nicht, was sie tun". In einer Szene dieses Filmes streiten sich zwei Männer um ein Mädchen. Um ihr Herz zu erobern, stellen sie sich einer Mutprobe: Beide fahren mit einem Auto auf eine Klippe zu, wer zuerst bremst oder aus dem Auto springt ist das Chicken, also der Feigling. Der andere jedoch gewinnt die Liebe des Mädchens. Das Problem bei der Sache: Wenn keiner der beiden nachgibt und bremst, sterben beide, da sie von der Klippe stürzen.

In unserem Kurs haben wir versucht, diese Situation mittels elektrischer Schaltungen nachzustellen. Aus technischen Gründen fuhren bei uns die Kontrahenten aufeinander zu. Bei uns bekam jeder Spieler eine Art Handschuh aus leitendem Material, der über ein Kabel mit unserer Schaltung verbunden war. Wer ausweicht uns somit eine Lichtschranke durchbricht ist das Chicken, stoßen jedoch beide zusammen, „sterben" sie.

Weil wir unsere Verlierer natürlich nicht von einer Klippe stürzen konnten, haben wir um Geld gespielt.

Spieler B

	I (Ausweichen) (β)	II (Weiterfahren) (1-β)
I (Ausweichen) (α)	30,30	10,50
II (Weiterfahren) (1-α)	50,10	0,0

Spieler A

Wenn beide ausweichen (Strategie I), bekommen beide ihren Einsatz von 30ct wieder zurück. Wenn nur ein Spieler ausweicht, erhält dieser 10ct, weil er am Leben bleibt, der Gewinner jedoch 50ct. Stoßen sie aber zusammen, verlieren beide ihren gesamten Einsatz.

Erwartungswerte für Spieler A

$E_{AI} = 30\beta+10(1-\beta)$

$=20\beta+10$

$E_{AII} = 50\beta+0(1-\beta)$

$= 50\beta$

$E_{AI} = E_{AII}$

$20\beta+10=50\beta$

$\beta=1/3$

$E_{Ages} = E_{AII} = 50\beta =50/3 =17$

Der Erwartungswert 17ct bei einem Einsatz von 30ct bedeutet, dass man selbst bei rationalem Handeln im Durchschnitt fast die Hälfte seines Geldes verliert. Außerdem muss man bei optimaler Spielweise in zwei von drei Fällen weiterfahren. Da dies nicht der Situation im Film entspricht und wir außerdem bald keine Leute mehr gefunden haben, die ihr Geld verzocken wollten, haben wir die Matrix abgewandelt. Dabei haben wir dem Tod eine viel schwerwiegendere Bedeutung zugemessen:

Spieler B

Spieler A

	I (Ausweichen) (β)	II (Weiterfahren) (1-β)
I (Ausweichen) (α)	1,1	0,2
II (Weiterfahren) (1-α)	2,0	-100,-100

Erwartungswert für Spieler A:

$E_{AI} = 1\beta+0(1-\beta)$

$=\beta$

$E_{AII} = 2\beta+(-100)(1-\beta)$

$= 102\beta - 100$

$E_{AI} = E_{AII}$

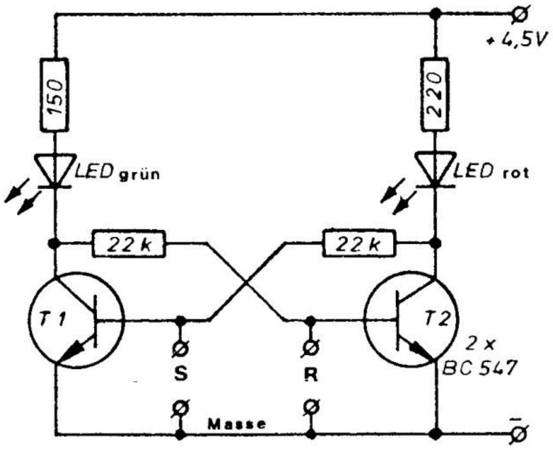
$\beta = 102\beta - 100$

$\beta = 100/101$

$E_{Ages} = E_{AI} = \beta = 100/101 = 0{,}99$

Das heißt bei einem Euro Einsatz bekommt man bei rationalem Handeln im Schnitt 99ct wieder zurück. Die optimale Strategie ist es, in 100 von 101 Fällen auszuweichen, was der Realität deutlich näher kommt.

Der technische Aufbau:



Der Transistor: Ein Transistor hat drei Anschlüsse. Erst wenn an der Basis B eine Spannung anliegt, kann zwischen den beiden anderen Anschlüssen Strom fließen.

Das Bild auf der linken Seite ist der Schaltplan eines Flipflops.

Beim Einschalten liegt an der Basis des Transistors 1 eine Spannung an, d.h. er leitet. Dieser Stromfluss bringt die grüne LED zum Leuchten. Die rote LED leuchtet nicht, weil am Transistor 2 keine Spannung anliegt und er somit nicht leitet.

Wenn keiner der Schalter betätigt wird, bleibt dieser Zustand erhalten, weil das ohne Umschalten der Transistoren der Weg des geringsten Widerstandes ist.

Wenn Schalter S geschlossen wird, liegt an der Basis von T1 keine Spannung mehr an. Sie geht stattdessen durch S direkt zum Minus-Pol. Somit kann kein Strom mehr durch T1 fließen. Nun fällt eine Spannung an T2 ab, somit leitet dieser Transistor und der Strom fließt durch die rote LED. Auch wenn der Schalter S wieder geöffnet wird, leuchtet die rote LED weiter, da dies der Weg des geringsten Widerstandes ist, solang T1 nicht leitet.

Wird der Resetschalter R gedrückt, passiert der umgekehrte Vorgang und die grüne LED beginnt wieder zu leuchten.

In unserem Aufbau haben wir drei Flipflops verwendet: Zwei um anzuzeigen, ob die Lichtschranken unterbrochen wurden und einen, um anzuzeigen, ob es einen Kontakt zwischen den beiden Handschuhen gab.

In der Praxis zeigte sich, dass bei den meisten Spielern die emotionale Komponente bei der Entscheidung dann doch einen viel größeren Raum einnahm, als die rational durchdachte Strategie.

Schluss

Nachdem die Spieltheoretiker zwei Wochen lang die anderen Teilnehmer beim Spielen reihenweise übers Ohr gehauen hatten und sich nun Profis nennen dürfen, mussten sie zu ihrem Leidwesen feststellen, dass keiner mehr mit ihnen spielen wollte. Trotzdem blicken sie auf zwei Wochen in Lindau, die sowohl lehrreich, als auch lustig waren, zurück und verließen das Bodensee Gymnasium nur schweren Herzens.