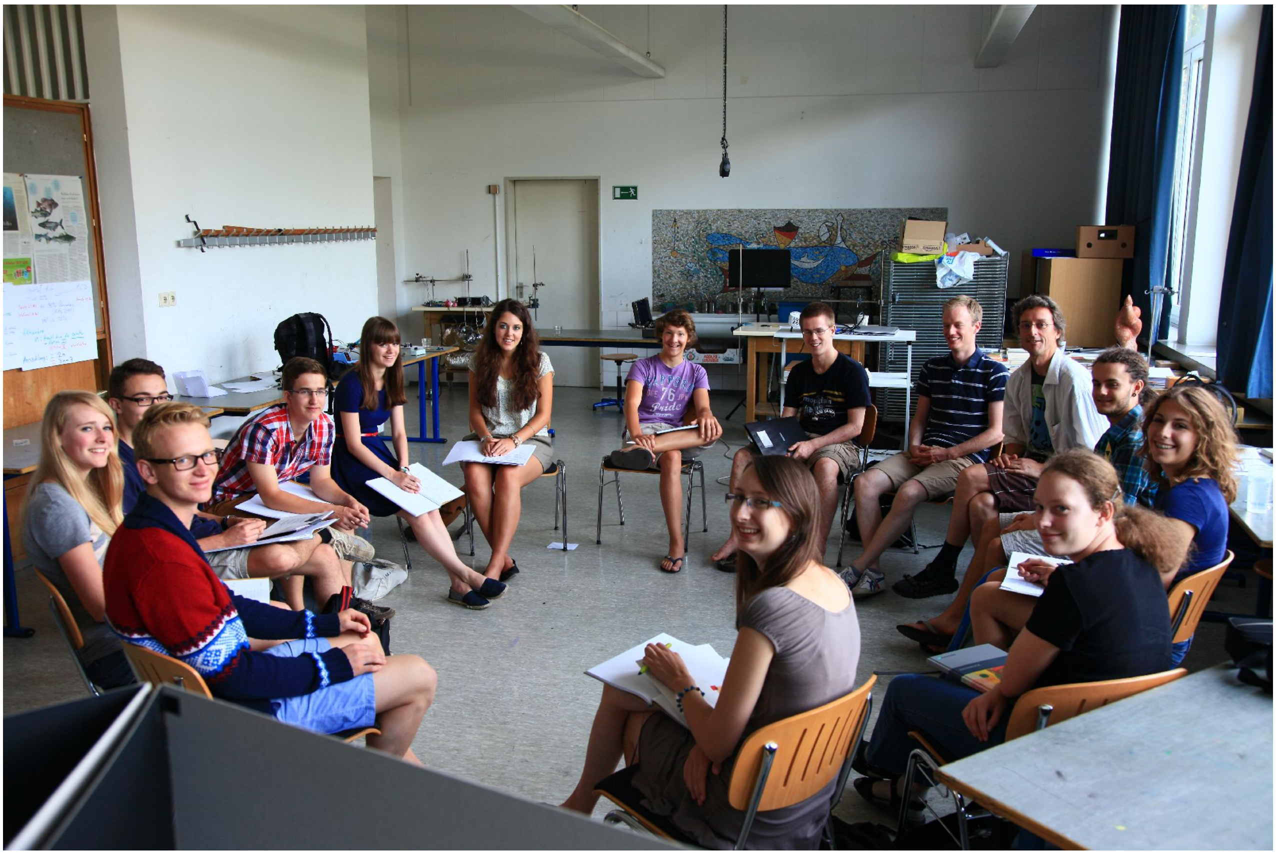
Kurs Spieltheorie



Im Uhrzeigersinn von vorne links: Florian, Katharina, Alexander, Wolfgang, Anna-Clara, Claudia, Ludwig, Bence, Klaus, Gerd, Alex, Barbara, Alexandra, Patricia

Vorwort

Eine Bank ausrauben, Schokolade aufteilen, Schwarzfahren oder die Überfischung der Weltmeere lösen - alles keine Thematiken, die man auf den ersten Blick der Spieltheorie zuordnen würde. Und dennoch kann man all dies auf simple Spiele reduzieren. Es geht nicht darum, eine absolute Lösung zu finden. Manchmal ist es wichtiger, die Situation an sich zu begreifen. Die Erkenntnis der Mangelhaftigkeit des eigenen Handelns, der Komplexität selbst des Trivialen und der Grenzen des rationalen Handelns sind ein wichtiger Schritt.

In der Spieltheorie geht es darum, die rationalste Handlungsentscheidung zu finden. Rational bedeutet hierbei, für sich selbst gesehen den maximalen Ertrag zu erzielen.

Der Kurs eröffnet eine neue Sichtweise im Bezug auf Strategien und Spiele. Er ermöglicht es den Teilnehmern rationale und logische Strukturen zu analysieren und zu bewerten. Neben Einblicken in die Mathematik und Wirtschaft, sind Exkurse in die Literatur, die Welt der Oper und in die Philosophie auch vertreten: Von der optimalen Strategie bei Aktienverkäufen, bis hin zu den Paradoxien und Grenzen der Logik.

Falls Sie alle ökonomische Ressourcen immer optimal ausschöpfen wollen, können wir Ihnen nur eines raten: Seien Sie so egoistisch, wie es auch rational ist, sprechen Sie sich beim Bankraub ab und fahren Sie gelegentlich schwarz!

Die Themen im einzelnen:

Gefangenendilemma
Ein wenig Theorie
- **Grundlagen**
- **Cournot'sches Duopol**

Teilungsprobleme
- **Neidfreie Teilung eines Kuchens**
- **Ultimatumspiel**

Chicken-Game
Kleinere Spiele
- **Mittelwert-Schätzen**
- **1€ - Versteigerung**
- **Partnerdiktat**
- **Die Welt retten**
- **Efronsche Würfel**
- **Go**

Resümee

Das Gefangenendilemma

Im Gefangenendilemma mit 2 Personen herrscht das Problem, dass 2 Personen, ohne Absprache, also unabhängig voneinander eine Entscheidung treffen müssen, wobei bei der Entscheidung berücksichtigt werden muss, wie der Gegner denkt. Der Name lässt sich wirklich von dem Problem zweier Gefangener herleiten.
Ein Beispiel:
Zwei Personen begehen gemeinsam einen Bankraub. Die Beute können sie noch verstecken, jedoch werden sie bei der weiteren Flucht von 2 Polizisten aufgehalten, welche dann bei den beiden Bankräubern im Auto Waffen finden. Nun werden die Bankräuber getrennt voneinander in deren Zellen gebracht, sodass sich diese nicht mehr über eine Aussage absprechen können.
Da ihnen der Bankraub nicht nachgewiesen werden kann, wird versucht, die beiden Gefangenen gegeneinander auszuspielen, indem den Bankräubern folgendes Angebot gemacht wird: Derjenige, der den anderen für den Bankraub verrät, kommt ohne Bestrafung frei, das heißt, er wird für den Waffenbesitz nicht bestraft. Dabei wandert der Gegner, der nicht geständig ist, für 10 Jahre in das Gefängnis, aufgrund von Bankraub und Waffenbesitz. Sollten beide den anderen beschuldigen, bekommen sie beide 6 Jahre, aufgrund von Waffenbesitz und Bankraub, da ihre Haftdauer durch das Geständnis vermindert wird. Sollten beide jedoch nicht gestehen, ist ihnen kein Bankraub nachzuweisen und sie müssen beide nur für 2 Jahre aufgrund des Waffenbesitzes ins Gefängnis.
Aufgrund der Darstellung könnte man vermuten, dass beide nicht gestehen, um so kurz wie möglich ins Gefängnis zu wandern. Dies stimmt jedoch nicht, denn Person A, verrät Person B, um selbst frei zu kommen, Person B macht jedoch dasselbe. Damit sind zwei Geständnisse vorhanden und beide müssen für 6 Jahr in das Gefängnis. Nicht der minimale Wert, jedoch der natürlichste.
Diesen Rechenweg kann man in Form einer Matrix darstellen.

		Person B g	ng
Person A	g	6 | 6	← 0 | 10
	ng	↑ 10 | 0	←↑ 2 | 2

Die Zahle in Rot stellen die möglichen Jahre für Person A dar, die schwarzen Zahlen die für Person B. Die Pfeile der entsprechenden Farbe stellen die bevorzugte Variante dar. Wie man feststellen kann, kommt man, wenn man die Pfeile von einem beliebigen Feld beginnend verfolgt, zu dem gelb markierten Feld mit jeweils 6 Jahren Gefängnis. Dieses Feld, das als bevorzugtes Feld gilt, bezeichnet man als Nash Gleichgewicht. Da nur ein Feld vorhanden ist, zu dem die Pfeile hinführen, bezeichnet man die Strategie als strikt dominante Strategie.

Dasselbe könnte man, mit der Aufteilung eines Kuchen machen, indem zwei Personen, unabhängig voneinander, entscheiden müssen, ob er/sie lieber 2/5 oder 3/5 haben möchten. Wenn beide 2/5 möchten, bekommen sie beide jeweils diesen gewünschten Anteil, wollen beide 3/5, bekommen beide jeweils 1/5 (da es nicht aufgeht), will aber einer 3/5 und der Andere 2/5, bekommt der, der 3/5 möchte, den ganzen Kuchen, da er offenbar mehr Hunger hat, der der 2 /5 möchte, gar nichts. Hier ist es ebenso, dass es die dominante Strategie ist, 3/5 zu wählen, also das größere Stück vom Kuchen, obwohl dann beide mit 1/5-Stücken enden, da ja beide Akteure sich für die dominante Strategie entscheiden.

Wiederholtes Gefangenendilemma

Das Gefangenendilemma wird normalerweise in nur einer Runde gespielt, es geht also um alles oder nichts. Man spielt, da man ja nicht weiß wie der Partner sich entscheidet, zum eigenen Vorteil. Wiederholt man das Spiel unter gleichen Voraussetzungen, dann ergeben sich neue Aspekte. Die Matrix muss allerdings so verändert werden, dass man Punkte Bekommt. Würde man in der Originalversion des Dilemmas eine lange Haftstrafe bekommen, bekommt man hier wenig Punkte und bei einer kurzen Haftstrafe oder gar einer Freilassung bekommt man viele Punkte. Wer in Summe die meiste Punkte Hat, hat gewonnen.
Wir spielten es 100 Mal und stellten relativ schnell fest, dass man auf den anderen Spieler eingehen, ihn sogar erziehen kann. Für beide Spieler ist es am besten, wenn sie sozial spielen. So bekommen sie zwar einzeln weniger als wenn einer unsozial, zum eigenen Vorteil spielt, aber immerhin mehr, als wenn sich beide nur für sich entscheiden. Spielt der Partner unsozial, dann kann man selbst solange zum eigenen Vorteilspielen, bis der andere klein beigibt. Verändert man die Matrix, dann hat ein Spieler mehr macht und kann, ohne dass der andere etwas dagegen unternehmen kann, höhere Gewinne einstreichen.

Die unerwartete Klausur

Um zu zeigen, dass man trotz gründlichen Nachdenkens manchmal mit Logik nicht weiterkommt, haben wir eine Denkaufgabe durchgenommen. Diese lautete: „Diese Woche schreiben wir bis Freitag unerwartet einen Test.“ Nun galt es herauszufinden, wann dieser geschrieben wird. Da der Freitag als letzter Tag nicht mehr unerwartet ist, wenn man bis dahin noch keinen Test geschrieben hat, fällt dieser weg. Somit kann man auch den Donnerstag, unter der Annahme, dass am Freitag kein Test geschrieben werden kann, ausschließen. Führt man diese Vorgangsweise für alle Wochentage von hinten fort, so kommt man zu dem Schluss, dass der Test an keinem Tag geschrieben wird. Denkt man unter dieser Annahme die Aufgabe fort, so wird der Test nun an keinem der Tage mehr erwartet, und könnte so wiederum jeden Tag geschrieben werden. Nun ist auch die Paradoxie dieser Aufgabe erkennbar, der Test kann entweder an keinem der Tage, bzw. an jedem Tag geschrieben werden, das Datum ist somit nicht berechenbar. Dasselbe Paradoxon tritt beim wiederholten Gefangenendilemma auf, wenn gegen Ende eines 100 Runden Spiels sich jeder Spieler fragt, ob es vorteilhaft ist noch einmal zu kooperieren oder nicht.

Das Mehrspieler-Gefangenendilemma

Eine weitere Version des Gefangenendilemmas ist das Mehrspielergefangenendilemma. Um diese Spielvariante von der Abstraktheit zu lösen, spielten wir eine Gruppe von Aktionären. Jeder Mitspieler hatte zwei Wahlmöglichkeiten, 1., die Aktien behalten und dadurch Dividenden kassieren oder 2., die Aktien verkaufen und dadurch Geld zu gewinnen. Allerdings steigt oder sinkt der Wert der Aktien dadurch, wie viele Aktionäre verkaufen wollen. Die Anzahl der Spieler, die 1 gewählt haben, ist n. Der Ertrag wird nicht mit Hilfe eine Matrix sondern mit den Folgenden zwei Formeln berechnet:
1. $E = 2n$
2. $E = 3n+3$
Rational gesehen ist 2. die bessere Wahl. Wenn allerdings alle Spieler 2. Wählen ist $n = 0$ und jeder erhält nur 3 Punkte, ein Bruchteil dessen, was man bekommen würde, würden sich alle Spieler für 1. Entscheiden. Hier hat man also wieder das Problem, des ursprünglichen Gefangenendilemmas: Egoistisch spielen oder kooperieren? Im Kurs klappte es mit der Kooperation nicht sonderlich gut, so dass deutliche Verluste eingefahren wurden.

In der Realität kommen solche Situationen durchaus vor: zum Beispiel bei der feindlichen Übernahme von Firmen. Behalten alle Aktionäre bis auf einen ihre Aktien, dann kann dieser Einzelne am meisten einnehmen, also wird man als einzelner verkaufen wollen. Da dies sich alle sagen, werden alle verkaufen und demzufolge der für alle geringst mögliche Gewinn erzielt.

Fishbanks

In einigen Spielen haben wir festgestellt, dass Kooperation die optimale Strategie ist, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen.
Ein Beispiel hierfür ist „Fishbanks“, ein Spiel von Dennis Meadows. In diesem Planspiel konnten wir das Verhalten von Fischgründen näher praktisch erfahren, indem wir selbst Fischer „spielten“. Dies ist auch ein Beispiel für das n-Personen-Gefangenendilemma. Die große Schwierigkeit offenbarte sich erst im Verlaufe des Spiels: Selbst wenn alle eingesehen hatten, dass Kooperation dringend vonnöten ist, ist noch lange keine Kooperation im Gange, da eben noch der wichtige Schritt fehlt, von dieser Einsicht zu einer gemeinsamen Handlung zu gelangen.

Ein wenig Theorie

Grundlagen

Wie verlaufen Berechnungen, die angewandt werden, um den größtmöglichen Nutzen aus einer Situation zu ziehen, wenn verschiedene Auswahlmöglichkeiten (Strategien) zur Verfügung stehen? Im folgenden Abschnitt werden durch Beispiele ein paar Grundbegriffe und verschiedene Varianten zur Ermittlung einer optimalen Strategie erläutert.

Nash-Gleichgewicht
Die jeweilige Wahl der beteiligten Spieler einer für sie selbst optimalen Strategie bezeichnet man als Nash-Gleichgewicht, nach dem Mathematiker John Nash. Wenn es sich immer auszahlt, eine bestimmte Strategie zu wählen, da der persönliche Gewinn in diesem Fall unabhängig vom anderen Teilnehmer immer höher ausfällt, spricht man von einer dominanten Strategie. Im vorherigen Beispiel des Gefangenendilemmas bestand das Nash-Gleichgewicht in einer dominanten Strategien beider Akteure, obgleich wir gesehen haben, dass hierdurch das Gesamtergebnis suboptimal wurde.

Gemischte Strategien, Münzspiel von Montmort

Gelegentlich ergeben sich Probleme bei der Ermittlung einer dominanten Strategie, da die optimale Strategie abhängig vom Verhalten der Mitspielern ist. In diesem Fall existiert keine reine optimale Strategie, sondern das Nash-Gleichgewicht besteht in einem stetigen Wechsel von einer Entscheidung zu einer anderen.

Ein Beispiel: Vater (V) spielt mit seinem Sohn (S) ein Ratespiel. Die Aufgabe des Sohnes ist es zu erraten, in welcher Hand sein Vater zuvor eine Münze versteckt hat. Rät der Sohn falsch, gewinnt er gar nichts. Rät er jedoch richtig, so bekommt er die jeweilige Münze. Dabei versteckt der Vater jedoch entweder eine 1€ Münze in der linken, oder aber eine 2€ Münze in der rechten Hand. Dieses Spiel wird beliebig oft wiederholt. Es ist nun zu ermitteln, welche Seite wie oft vom Vater bzw. Sohn gewählt werden soll, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen.

Bei diesem Spiel besteht das Problem, dass die Entscheidung des Sohnes zwischen links und rechts davon abhängt, in welche Hand sein Vater die Münze versteckt. Wählt der Vater links, so will der Sohn selbstverständlich auch links wählen. Sieht der Vater das voraus, wird er die Münze aber in seine Rechte verstecken, woraufhin der Sohn auch seine Meinung ändern würde. Das führt dazu, dass Vater und Sohn mit dieser Methode nie eine vorteilhafte Strategie wählen können.

	Vater	
	Links	Rechts
Diagramm des Sohnes: Links	-1 1	0 0
Rechts	0 0	-2 2

Strategieermittlung als Extremwertaufgabe

Der durchschnittliche Gewinn wird als zu maximierende Größe gesetzt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Vater links wählt wird als α bezeichnet. Da sich die Wahrscheinlichkeiten von links und rechts auf 1 (100%) ergänzen müssen, ist die Wahrscheinlichkeit dass der Vater rechts wählt gleich $1-\alpha$. Analog dazu bezeichnen wir die Entscheidungshäufigkeit des Sohnes mit β (links) bzw. $1-\beta$ (rechts).

Nun wird der Erwartungswert, also der vorhersehbare Gewinn der Teilnehmer ermittelt. Dazu müssen die Gewinne in den verschiedenen Situationen, multipliziert mit der Häufigkeit ihres Auftrittes, zusammengezählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Sohn die Münze in der rechten Hand des Vaters errät, beträgt z.B. $1- \alpha$ (Vater wählt rechts) mal $1-\beta$ (Sohn wählt rechts).

Um den niedrigsten Verlust für den Vater, bzw. den höchsten Gewinn für den Sohn zu errechnen, werden die Erwartungswerte differenziert. Da der Vater β nicht beeinflussen kann, wird E_V nach α abgeleitet, und β wird als konstant angenommen. Der Sohn kann aber nur β verändern, daher wird E_S nach β abgeleitet, und α wird als konstant angenommen.

Um nun den Extremwert zu ermitteln, werden die Ableitungen gleich 0 gesetzt. Daraus ergibt sich, dass der maximale Gewinn des Sohnes, und der minimale Verlust des Vaters dann eintritt, wenn beide Teilnehmer mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 (66,7%) links wählen.

Graphische Lösung
Das gleiche Beispiel lässt sich auch graphisch lösen. Dabei werden die zur Wahl stehenden Strategien (links wählen/ rechts wählen) als Funktionen dargestellt, und diejenige gewählt, die den höheren Gewinn bringt.
Um das Gegenüber in Ungewissheit über die eigene Wahl zu lassen, wählen im optimalen Fall sowohl Vater als auch Sohn den Schnittpunkt der beiden Funktionen. Das heißt, beide wählen mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 links. Damit wird ein höherer Verlust vermieden, falls der Gegner von der idealen Strategie abweicht, gleichzeitig ist ein höherer Gewinn aber auch nicht möglich.

Praktisches Spiel zur Überprüfung: Straßenbahnfahren
Die Thematik der optimalen Strategien lässt sich u.a. auch anhand der öffentlichen Verkehrsmittel beschreiben. Bei der Nutzung der öffentlichen Verkehrsmittel wird der Fahrgast mit zwei Optionen konfrontiert: Vorschriftsmäßig eine Fahrkarte zu entwerten oder aber schwarz zu fahren und 40€ Strafe zu riskieren. Welche Option verspricht hier den größtmöglichen Gewinn bzw. den geringsten Verlust?
Das Problem lösten wir zunächst ganz experimentell: Innerhalb des Kurses wurden zwei Parteien etabliert – zwei „Kontrolleure" gegenüber zehn „Fahrgästen". Der Fußweg zwischen der Jugendherberge und dem Bodensee-Gymnasium entsprach dabei der Fahrstrecke, die mehrmals „befahren" wird. Den Kontrolleuren steht es frei, Kontrollzeit und –häufigkeit zu wählen. Bei Schwarzfahrern kassieren sie die verhältnismäßig hohe Strafe, bei der Kontrolle eines Fahrgastes mit gültigem Fahrschein hingegen entfällt auf sie selbst ein geringer Betrag – repräsentativ für den Kontrollaufwand.

		Kontrolleur (keine)	Kontrolle
Fahrgast	zahlen	0 -30	-20 -30
	schwarz	0 0	+80 -100

Wir berechneten – wie im Beispiel des Vater-Sohn-Münzspiels – mit Hilfe der Erwartungswerte die optimalen Strategien für Fahrgast und Kontrolleur. Es zeigte sich bei uns in der Praxis allerdings, dass wir beim Spielen teilweise recht weit von diesen Strategien abwichen.

Das Cournot'sche Duopol

Das Cournot'sche Duopol behandelt das Problem, dass zwei große Firmen einen Markt oder ein Gut dominieren und dieses unter sich aufteilen müssen. Beide versuchen dabei natürlich ihre eigene Produktionsmenge optimal zu wählen und selbst den maximalen Gewinn zu erwirtschaften. Dabei stellt die Unbekannte der Produktionsmenge der konkurrierenden Firma und der daraus resultierenden Preis, wegen der Abhängigkeit des Preises von der vorhandenen Gesamtproduktmenge, ein Hindernis da. Für die Veranschaulichung dieser Problematik hat Auguste Cournot Mineralwasser als das Gut festgelegt.

Ist das Angebot minimal abgedeckt beträgt der Preis für eine 0,5 Literflasche 100 Cent. Ist das maximale Angebot erreicht geht der Preis gegen 0 Cent.

Preis… P

Minimales Angebot… $P = 100$

Maximales Angebot… $P = 0$

Der Preis hängt somit offensichtlich von der Menge der Produkte ab.

Produktionsmenge der Firma 1… Q_1

Produktionsmenge der Firma 2… Q_2

Mit diesen Variablen können wir nun die Formel

$P = 100 - (Q_1 + Q_2)$

aufstellen.

Interpretation: der maximale Preis, der bei der minimalen Produktion verlangt werden kann sinkt direkt proportional zur Gesamtproduktionsmenge der beiden dominanten Firmen.

Nun wollen die Firmen für sich selbst den maximalen Gewinn, der sich für die beiden Firmen jeweils aus folgenden Faktoren zusammensetzt:

Gewinn 1: $E_1 = Q_1 \times P$

Für P wird nun die Formel $P = 100 - (Q_1 + Q_2)$ eingesetzt, wodurch wir fertig gekürzt die Gewinnformel

$E_1 = -Q_1^2 + (100 - Q_2) \times Q_1$

erhalten.

Nach der Ableitung dieser Formeln nach der Produktionsmenge ergibt sich für die beiden Firmen $Q = 33{,}3$ bei einer Gesamtproduktion von 100. Wird mit diesem Wert weitergerechnet erhält man als Erwartungswert (voraussichtlicher Gewinn) $E = 1111$ Cent für jede Firma.

Berechnet man nun das Ganze nicht als konkurrierenden Duopol, sondern so, als ob beide Firmen kooperieren würden, sich quasi ein „Monopol" bildet, erhält man durch die daraus resultierende Änderung der Formel $P = 100 - (Q_1 + Q_2)$ zu $P = 100 - Q_1$ für $Q = 50$ und somit einen Gesamtgewinn von 2500 Cent.

Nun ist leicht ersichtlich, dass dieser Gewinn, teilt man ihn auf die zwei nun befreundeten Konzerne auf, mit 1250 Cent pro Firma immer noch höher ist als bei der Konkurrenzsituation.

Da aber in der Realität nun einmal jede Firma nach dem höchsten Gewinn für sich selbst strebt und der Gewinn der Firma die von dem Abkommen, dass jeder $Q = 25$ produziert leicht mit Q nach oben abweicht, nun einmal mehr Geld einnimmt, sehen wir nun wieder ein Gefangenendilemma vor uns, das nur durch kartellrechtlich nicht erlaubte Absprache kooperierend gelöst werden könnte.

Teilungsprobleme, Ultimatumspiel

Das Problem der „gerechten“ oder „neidfreien“ Kuchenteilung

Ob in der Wirtschaft oder beim Kindergeburtstag - jeder möchte das größte Stück vom Kuchen haben. Die Spieltheorie bietet durch Modellversuche Lösungsansätze für diese Probleme: Möchten zwei Personen einen Kuchen unter sich aufteilen, so schneidet einer den Kuchen, der andere sucht sich das Stück aus, welches ihm besser gefällt. Damit ist sichergestellt, dass beide mindestens die Hälfte bekommen.
Wenn jedoch ein Kuchen unter drei Personen neidfrei aufgeteilt werden soll wird das Problem schlagartig schwieriger. Wir haben es wie folgt gelöst: Zunächst halbiert Person 1 den Kuchen. Person 2 darf sich daraufhin für eine Hälfte entscheiden und diese in drei Teile teilen, während Person 1 die andere Hälfte ebenfalls in drei Teile schneidet. Anschließend sucht sich Person 3 von jeder Hälfte jeweils eines der drei Stücke - rational handelnd die seiner Ansicht nach größten - aus. Nun bekommt Person 1 zwei Drittel von seiner Hälfte, während Person 2 die restlichen beiden Stücke der Hälfte, die er sich zuvor ausgesucht hatte, bekommt. Somit erhält jeder 2/6, also subjektiv mindestens 1/3 des Kuchens.
Dieses Verfahren lässt sich auf beliebig viele Personen erweitern zeigt aber, dass schon die Gleichverteilung eines Gutes recht kompliziert ausfallen kann. Im folgenden geht es um Teilungen mit ungleich verteilten Rollen.

Das Ultimatumspiel

Beim Ultimatumspiel geht es um das Problem der Teilung. Dieses theoretische Problem sprachen wir gemeinsam am Beispiel eines äußerst reellen Kuchens an.
Das Ultimatumspiel kann in einer unterschiedlichen Anzahl an Runden gespielt werden, wobei sich das Spiel zwischen einer Runde und mehreren Runden deutlich unterscheidet.
Bei diesem Spiel darf immer Person A Person B ein Stück des zu teilenden anbieten. Daraufhin kann diese das Angebot entweder annehmen oder ablehnen. Das Spiel wird auf n Runde begrenzt, wobei die Anzahl beiden Mitspielern bekannt ist.
Sollte Person B ablehnen, so darf sie in der nächsten Runde (vorausgesetzt es werden mehrere Runden gespielt) Person A einen Anteil anbieten und diese muss annehmen oder ablehnen. Das wechselt so lange hin und her, bis ein Spieler annimmt, bzw. die begrenzte Rundenanzahl erreicht ist. Dabei gilt jedoch, dass in jeder weiteren Runde die Größe des aufzuteilenden Kuchen um $\frac{1}{n}$ (n=Anzahl der Spielrunden) der ursprünglichen Größe absinkt.
So verschwindet z.B. bei 3 Spielrunden von Runde 1 auf Runde 2 $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Kuchens. Sollte nach der letzten Runde keiner dem Angebot des anderen zugestimmt haben, so bekommt keiner einen Anteil des Kuchens.
Für dieses Spiel haben wir uns für 1,2,3,4,5,6 und 7 Runden überlegt, wie viel man in der ersten Runde als Person A anbieten muss, damit Person B auf jeden Fall annimmt, wenn diese rational und gewinnorientiert ist, wobei wir es auch selber durchspielten.

Ultimatumspiel mit nur einer Runde:
Person A kann Person B so wenig wie möglich anbieten, da Person B auf jeden Fall annehmen muss, denn selbst ein winziger Teil bedeutet für ihn mehr Gewinn als gar nichts zu bekommen. Dies ist auch das Ergebnis in der letzten Runde eines wiederholten Spiels.

Ultimatumspiel mit mehreren Runden:
<u>Ultimatumspiel mit zwei Runden:</u>
Hier ist die Lösung schon etwas diffiziler. Denn Person A muss sich überlegen, wie viel sie anbieten muss, damit sie für sich selbst denn größtmöglichen Gewinn hat, Person B aber damit einverstanden ist. Denn würde Person A der Person B weniger als 50% anbieten, würde Person B mit Sicherheit ablehnen, denn in der nächsten Runde darf sie Person A ein Angebot machen und da würde sie dann sicherlich mehr bekommen, denn sie kann Person B auch nur ein winzig kleinen Teil anbieten und diese würde zustimmen müssen, da sie sonst gar nichts bekäme und jeder für sich, dies ist ja die Grundvoraussetzung, den größtmöglichen Gewinn für sich machen muss.
Bietet Person jedoch 50%, wird Person B zustimmen, denn in der zweiten Runde sind nur noch 50% des Kuchens vorhanden und kann maximal die 50% minus einen winzigen Teil bekommen, denn angeboten muss etwas werden.

<u>Ultimatumspiel mit drei Runden:</u>
Hier ist im Gegensatz zum Ultimatumspiel mit 3 Runden der Vorteil für Person A, dass sie der letzte ist, der einen Anteil anbieten darf. Person B kann aufgrund dessen, dass der Kuchen jede Runde um $\frac{1}{3}$ sinkt, kann Person A also in Runde 3 maximal $\frac{1}{3}$ minus einen winzigen Teil bekommen. Somit wird Person A das Angebot von Person B in Runde 2 dann annehmen, wenn es mindestens $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Kuchens beträgt. Dabei kann Person B, da ja der Kuchen in Runde 2 nur noch $\frac{2}{3}$ des ursprünglichen Kuchen beträgt, auch nur maximal $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Kuchens bekommen. Somit muss Person A der Person B in Runde 1 $\frac{1}{3}$ anbieten, dann wird diese annehmen, da dies für ihn bereits der größtmögliche Gewinn ist.

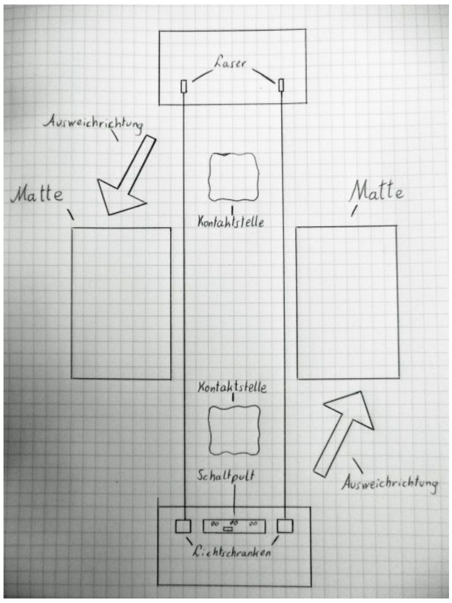
Diese Überlegungen haben wir auch für 4,5,6, und 7 Runden durchgeführt. Dabei sind wir zu einer Formel dafür gekommen, wie viel man den anderen anbieten muss. So muss man bei n Runden bei einer geraden Anzahl von Runden $\frac{n}{2}$ des ursprünglichen Kuchens anbieten, bei einer ungeraden Anzahl von Runden $\frac{n-1}{2n}$ des ursprünglichen Kuchens anbieten.

In der wirklichen Welt ergibt sich entgegen allen unseren Berechnungen dann die Überraschung, dass im Allgemeinen Menschen <u>nicht</u> ökonomisch, sprich rational handeln sondern weitgehend eine einigermaßen gerechte Teilung bevorzugen, obgleich man für diese Spielart feststellen kann, dass es kulturelle und altersbedingte Unterschiede gibt, wie viel angeboten wird. So wird eine Person aus den gemäßigten Breiten „gerecht" teilen und in etwa 40-50% anbieten. In tropischen Ländern wird jedoch weniger als 50% angeboten, sie sind jedoch auch leichter zufrieden. In Indonesien wird sogar mehr als 60% angeboten.
Bei den Altersunterschieden ist bemerkenswert zu erwähnen, dass Kinder zwischen 3 und 8 Jahren sehr schnell mit wenig zufrieden sind, jedoch auch selber nicht viel anbieten.

Chicken-Game

Geschichte und Spielprinzip:

Das sogenannte „Chicken Game“ stammt ursprünglich aus dem Film „Denn sie wissen nicht, was sie tun“. Es ist eine Mutprobe, bei der zwei Jugendliche in geklauten Autos auf einen Abgrund zu rasen. Derjenige, der eher aus dem Auto heraus springt, ist das "Chicken", sprich das Weichei, da er offensichtlich Angst hatte, den Abgrund hinunter zu stürzen. Beide "Spieler" haben ständig zwei Wahlmöglichkeiten: Entweder sie entscheiden sich sitzen zu bleiben, riskieren folglich zu stürzen und auf diese Weise zu sterben, werden allerdings vermutlich nicht das Chicken sein. Oder aber sie springen aus dem Fahrzeug, laufen also Gefahr das Chicken zu sein, werden jedoch nicht in den Abgrund stürzen. Im Film ist der Schauspieler James Dean das Chicken, sein Rivale schafft es nicht mehr rechtzeitig das Auto zu verlassen und stirbt.[redacted]



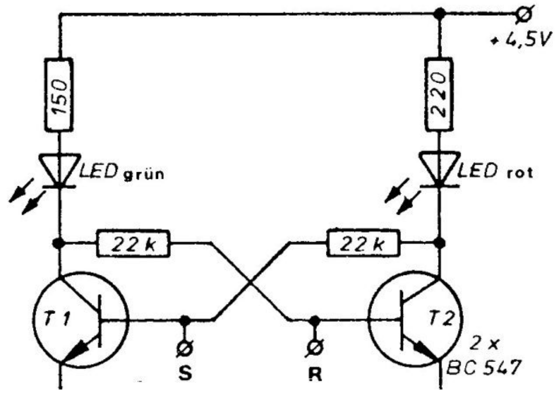
Wir haben dieses Spiel nachgestellt und modelliert. Statt den fahrenden Autos rennen in unserem Spielaufbau zwei mit elektrisch kontaktierten, weichen Kissen ausgestattete Spieler aufeinander zu. Der Spieleintritt beträgt 25 Cent. Weichen beide aus, so sind sie beide Chicken und gewinnen je 30 Cent. Falls keiner ausweicht, sie also zusammenprallen, gewinnt keiner der beiden etwas. Rennt einer weiter, der andere hingegen weicht aus, so gewinnt der Mutige 1€, das Chicken nur 10 Cent.[redacted]

Links und rechts der Bahn waren Weichbodenmatten, unterhalb normale Matten ausgelegt und es war vorgegeben, dass man nur nach rechts ausweichen darf. Zuvor bei Testläufen hatten wir festgestellt, dass die Matten bitter nötig waren!

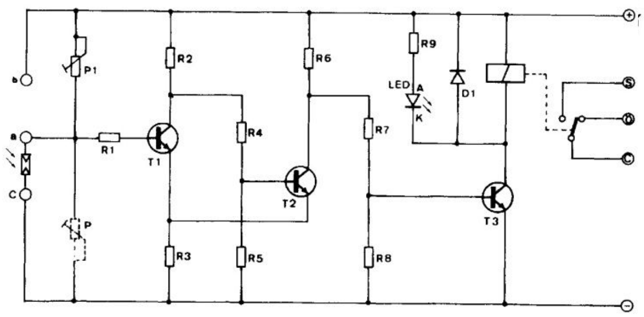
Neben diesen mechanischen Voraussetzungen mussten wir einige Verdrahtungen anstellen, damit das Spiel perfekt laufen konnte:

Elektronik:

Die fertige Schaltung besteht aus mehreren Hauptelementen. Erstens einem Flip-Flop-Schalter (Abb. 1): Diese Schaltung dient dazu, dass bei der Verbindung von den jeweiligen Kontakten zwei farbige LEDs jeweils ihren Zustand wechseln. Verbindet man die Kontakte S, so leuchtet vorher die grüne LED und nachher die rote LED. Verbindet man die Kontakte R, so leuchtet vorher die rote LED und nachher die grüne LED.



Zweitens einer Lichtschranke (Abb. 2): Die Lichtschranke funktioniert mithilfe eines LDRs (lichtabhängiger Widerstand). Gleichzeitig ist noch ein Relais in den Stromkreis eingebunden, um die Zustandsänderung der Lichtschranke weiterzugeben. Das Relais schaltet um, wenn die Lichtschranke durchbrochen wird.



Die fertige elektrische Schaltung lässt sich in mehrere Teile einteilen. Zum einen die Kissen, die mit leitendem Material und elektrischen Kontakten ausgestattet sind. Sobald die Kissen sich berühren, schließen sie den Stromkreis, der an die beiden Kontakte des Flip-Flop-Schalters angeschlossen ist und lassen damit den Schalter von der grünen auf die rote LED umspringen. Damit lässt sich ein Aufeinandertreffen bzw. der Zusammenstoß belegen.
Zum anderen die Lichtschranken. Das Trimmpotentiometer ist so eingestellt, dass das Relais bei Unterbrechung der Bestrahlung durch die Laser umschaltet. Diese Umschaltung schließt wiederum einen Stromkreis, der mit den Kontakten eines weiteren Flip-Flop-Schalters verbunden ist. Dies geschieht auf beiden Seiten mit beiden Lichtschranken. Somit ist es möglich für beiden Seiten zu bestimmen, ob die spielende Person ausgewichen ist.
Sobald ein Spieler die Lichtschranke durchbricht, die Kissen aufeinanderstoßen oder als Startsignal gab ein Piezo-Lautsprecher einen Piepton ab.
Die Zurücksetzung der Flip-Flop-Schalter auf den Anfangszustand (grüne LED) geschieht über einen besonderen Schalter, der die zweiten Kontakte der Flip-Flop-Schalter verbindet und eine gleichzeitige Rücksetzung ermöglicht.

Auswertung der Praxis:
Die Mehrheit der Spieler auf dem Marktplatz hat die für sie selbst schlechteste und für uns beste Strategie gewählt; alle wollten den Hauptgewinn, was schlussendlich zu einer sehr hohen Rate an Zusammenstößen geführt hat. Interessant daran war vor allem, dass alle Teilnehmer das Spielprinzip voll verstanden und meist auch schon einem Vorgängerspielerpaar zugesehen hatten, sich aber trotzdem auch nach längerer Zeit keine Änderung im Spielverhalten und der Häufigkeit der Zusammenstöße ergab. Dadurch, dass manche Spieler mehrmals hintereinander gegeneinander gespielt haben, also mit Wiederholungen die im Original nicht möglich gewesen wären, hat sich sogar statt der besseren Strategie der Ehrgeiz der Spieler durchgesetzt und diese haben erst recht auf Risiko zu spielen begonnen. Doch zum Glück und für die Ehre unserer Talentakademieteilnehmer gab es auch vereinzelt Spielerpaare, die nach einer gewissen Zeit begonnen haben zu

kooperieren, doch durch die geringe pro Teilnehmer gespielte Spielanzahl, wurde die optimale Strategie für die Spieler nie lange durchgespielt.
Um die Möglichkeit einer Ausarbeitung der gewinnbringendsten Strategie bereits vor dem Spielen unter den Gegenspielern und Absprachen zu eliminieren, haben wir die Spielerpaare teilweise selbst bestimmt und manche Spielerkonstellationen bei offensichtlicher Kooperation sogar verboten, da diese gegen die eigentliche Ausgangssituation, zwei Rivalen die um Anerkennung und ein Mädchen kämpfen, widersprochen hätten.

Kleinere Spiele

Mittelwert-Schätzen

Bei diesem Experiment soll in einer Gruppe jeder eine Zahl zwischen 1 und 100 aufschreiben, von der er glaubt, dass sie 2/3 des Mittelwerts aller aufgeschriebenen Zahlen entspricht.

Wenn alle rational handeln, tippt folglich niemand eine Zahl, die größer als 66,6 ist. Dies kommt dadurch zustande, dass, wenn jeder 100, also die größtmögliche Zahl, tippen würde, ein größerer Wert als 66,6 nicht dem Mittelwert aller Zahlen - in diesem Fall 100 - entsprechen kann. Wenn jeder denkt, dass alle Mitspieler rational handeln, wird nun jeder 2/3 von 66,6 - der jetzt größtmöglichen Zahl - tippen. Diese Denkweise lässt sich unendlich weit fortsetzen, sodass schließlich jeder rational Handelnde 0 wählt. In der Praxis zeigte sich, dass wir bei weitem nicht rational handelten. Das Spiel verdeutlichte so in der Praxis das Dilemma des unendlichen Überdenkens beim Aufsuchen einer optimalen Strategie: Ich denke, dass Du denkst, dass ich denke, dass Du denkst, dass...

1€ - Versteigerung

Nach einigen Akademietagen wurde 1Euro unter uns versteigert. Es wurde von 0 Euro in 10 Cent-Schritten bis 2 Euro geboten. Die zuletzt bietende Person bekam den 1 Euro und macht die Differenz zum Gebot entweder Gewinn oder Verlust. Die Person mit dem 2. Höchsten Gebot muss dieses gebot zahlen und macht somit immer Verlust.
Zu Beginn des Spieles bieten viele Mitspieler wegen der Gewinnaussicht und somit das Spiel „ungefährlich“ wirkt. In der Nähe des 1 Euro-Wertes wird die Spielsituation schon „gefährlicher“, weil Verlustgefahr besteht. Da der 2. Bietende seinen Vorteil minimieren möchte, entsteht ein Zwang zu bieten. Dieser „Teufelskreis“ endet erst, sobald der 2. Bietende aufhört zu bieten, wozu er aber gar keinen Grund hat, da er sich ja stets in der Verlustzone befindet, so dass sich theoretisch die Angebote ins Unermessliche steigern können. Bei uns war meist bei 2 Euro die Schmerzgrenze erreicht.
Die optimale Strategie wäre, dass nur eine Person einmal bietet und so 10 Cent Gewinn macht. Damit entsteht kein Teufelskreis. Erstaunlich für alle war aber, dass dies niemals eingehalten wurde, so groß war der Sog des Gewinnwunsches.

Partnerdiktat

Ein Beispiel für Kooperation als optimale Strategie ist das Spiel „Partnerdiktat".
Hierbei haben wir uns zuerst in einem Kreis aufgestellt und immer zwei gegenüberstehende Personen haben ein Paar gebildet. Der Eine lass einen Zeitungsartikel vor und der Andere musste versuchen alles richtig und möglichst schnell aufzuschreiben. Die Schwierigkeit lag darin, dass alle gleichzeitig diktierten und durch das Stimmgewirr die eigentliche Botschaft schwer verständlich war. Dieses Spiel wurde wiederholt. Doch dieses Mal setzten sich die Paare getrennt gegenüber und diskutierten nochmals möglichst schnell.
Als optimale Strategie oder Ergebnis stellte sich heraus, dass wir in der ersten Spielrunde schneller gewesen wären, wenn jedes Paar nacheinander den Zeitungsartikel diktiert und aufschreibt. Durch dieses Beispiel wird erneut der Nutzen von Kooperation in bestimmten Situationen deutlich.

Die Welt retten

Am Vorbereitungswochenende haben wir eine interessante Aufgabe durchgespielt, die auf den ersten Blick einfach wirkt, sich in Wirklichkeit aber nur schwer lösen lässt. Die Rahmengeschichte ging um eine Gruppe von Politikern, die die Erde retten wollen (z.B. durch strengere Maßnahmen für den Schutz der Umwelt). Dies wurde durch eine Gruppe von Leuten dargestellt, in deren Mittelpunkt eine Person steht (die Erde darstellend), um die ein Reifen gelegt wird. Das Ziel ist es nun, zusammen diesen Reifen aus einer mittleren Höhe heraus zu Boden zu senken und so die „Erde zu retten" (z.B. Senkung des CO_2-Ausstoßes). Jeder muss dazu einen Finger unter den Ring legen. Das Projekt scheitert, sobald auch nur ein Finger den Reifen nicht mehr berührt. Um dies zu vermeiden, hebt jeder seinen Finger relativ zu den anderen ein ganz klein wenig in die Höhe und bewirkt so genau das Gegenteil des eigentlich Geplanten. Jede Einseitigkeit muss, da sonst der Ring kippt, vermieden werden. Dies ist bei drei Personen noch sehr leicht zu bewerkstelligen, bei fünfen bereits äußerst schwer und je nach Gruppengröße dann irgendwann gänzlich unmöglich. Dies kann man auch wieder auf die Rahmengeschichte übertragen. Das Ziel, die Erde zu retten, kann nur erreicht werden, wenn alle sich in gleicher Weise bewegen und selbst dann (wenn man z.B. an die Anzahl der Mitgliedsländer der EU denkt) ist es ein äußerst anspruchsvolles, nahezu hoffnungslos erscheinendes Unterfangen.

Efronsche Würfel

Außerdem arbeiteten wir mit den sogenannten Efronschen Würfeln (erfunden vom Statistiker Bradley Efron). Das sind vier speziell präparierte Würfel, die besondere Eigenschaften haben. Technisch gesehen sind es völlig normale Würfel und man muss auch keine spezielle Würfeltechnik beherrschen, um zu gewinnen. Trotzdem kann man, wenn man weiß wie es geht, mit 2/3 Wahrscheinlichkeit die höhere Zahl würfeln. Das liegt an den unterschiedlichen Beschriftungen der Würfel. Diese sind so gewählt, dass sie sich gegenseitig übertreffen. In einiger Hinsicht widersprechen diese Würfel unserer klassischen Wirtschaftsansicht, der Transitivität, die besagt: Wenn ein Fahrrad mehr Wert ist als ein Lolly und ein Mercedes mehr Wert ist als ein Fahrrad, dann ist ein Mercedes mehr Wert als ein Lolly.

Go

Zum Trainieren der Voraussicht und –planung und als Beispiel für ein rein kombinatorisches Spiel spielten wir das traditionelle, japanische Brettspiel Go. Wir lösten vorbereitete Rätsel und spielten auch echte Partien.

Resümee

Man kann sagen, dass die Spieltheorie viele Möglichkeiten eröffnet, die Welt zu erfassen und rationaler zu durchdenken. Trotz dieser vielen Strategien und Entscheidungshilfen darf man nicht vergessen, dass es sich dabei nur um Modelle handelt. Diese stellen reale Probleme allein auf rationaler Ebene vereinfacht dar. Dabei wird außer Acht gelassen, dass Entscheidungen nicht nur logisch und objektiv begründet, sondern auch durch emotionale, subjektive und soziale Aspekte beeinflusst werden. Deshalb lassen sich die Ergebnisse der Spieltheorie nur bedingt anwenden, bzw. eine Umsetzung dieser ist an ein begrenztes rationales System gebunden. Dennoch eröffnet die Spieltheorie für jeden einzelnen eine Möglichkeit, durch mehr rational getroffene Entscheidungen, eine Optimierung des persönlichen Gewinns zu erreichen. Deshalb ist es nur zu empfehlen, sich mit diesem breitgefächerten Feld auseinander zu setzen, da seine Inhalte von Wirtschaft über den Alltag bis hin zur Politik reichen. Die Bedeutung dieses wissenschaftlichen Gebiets wird aufgrund fortschreitender Globalisierung und Komplexität von Entscheidungsprozessen wachsen, bzw. an Einfluss gewinnen, da menschlich soziales und ökonomisches und ökologisches Zusammenleben immer enger verflochten wird und das Ziel des maximalen Gewinns nicht nur rein auf Güter sondern immer besser auch auf allgemeine Werte (größtmöglicher Umweltschutz, größtmögliches Wohlbefinden, bestmögliche Ressourcenverwertung) anwendbar wird.

Erfahrung der Kursteilnehmer

Alle Kursteilnehmer empfanden den Kurs als Bereicherung in vielerlei Hinsicht. Beeindruckt hat uns der Kurs zum einen dadurch, dass er geprägt war von freundlichem, offenem Umgang miteinander und einem entspanntem Arbeitsklima. Zum anderen hat uns der Einblick in die Spieltheorie zu vielen neuen Ansichten verholfen. Wir haben erkannt, wie komplex sich die Welt bei näherer Betrachtung gestaltet, und wie man die Hintergründe von Entscheidungen beleuchten kann. Durch die Begeisterung und Motivation aller Teilnehmer im Kursgeschehen in Gruppe, Einzel- und Teamarbeit ergab sich zwischen uns eine ungezwungene Atmosphäre, die eine persönliche Weiterentwicklung erst ermöglichte. Dementsprechend wurden uns auch durch die hervorragende Arbeit unserer Kursleiter Gerd und Klaus neue Denkansätze geliefert und unsere Entscheidungsfindung hin zum rationalen sensibilisiert. Neben der kritischen Sicht auf den Alltag, Politik und Wirtschaft wurde man sich auch der Rolle der Emotionen im Entscheidungsprozess bewusst. Mitunter hat sich auch bei manchem von uns die Haltung zur Mathematik verändert und deren elementare Bedeutung wurde erkannt, Studienwünsche haben sich herausgebildet oder manifestiert und die Faszination für die vielfältigen Bereichen der Spieltheorie haben sich entfaltet. Durch die vielfältigen Mitgestaltungsmöglichkeiten wurde ein lebendiges Interesse für die Welt in uns geweckt, das uns hoffentlich weiterträgt und uns das Denken nie verlernen lässt. Denn: „Der Kopf ist rund, damit das Denken seine Richtung ändern kann.“ (Francis Picabia)