

Geometrie und Realität

Perspektive in Kubismus und Quantenmechanik

Vortrag Gerd Breitenbach, Dornach, Februar 2015

Was ist das „Ding an sich“ hinter den Erscheinungen?

Weg der projektiven Geometrie:

**Untersuche nicht nur die Objekte selbst sondern vorrangig
die Gesetzmäßigkeiten unseres Anschauungsraumes**

Geometrie und Realität

Perspektive in Kubismus und Quantenmechanik

Perspektive in der Renaissance

Die Eindeutigkeit der Wirklichkeit

Satz von Desargues

Klassische Physik:

Der Zustand eines Systems im Phasenraum

Quantenmechanik:

Der Messprozess als Projektion: Die Wignerfunktion

Beispiel: Licht/Atom als Welle/Teilchen

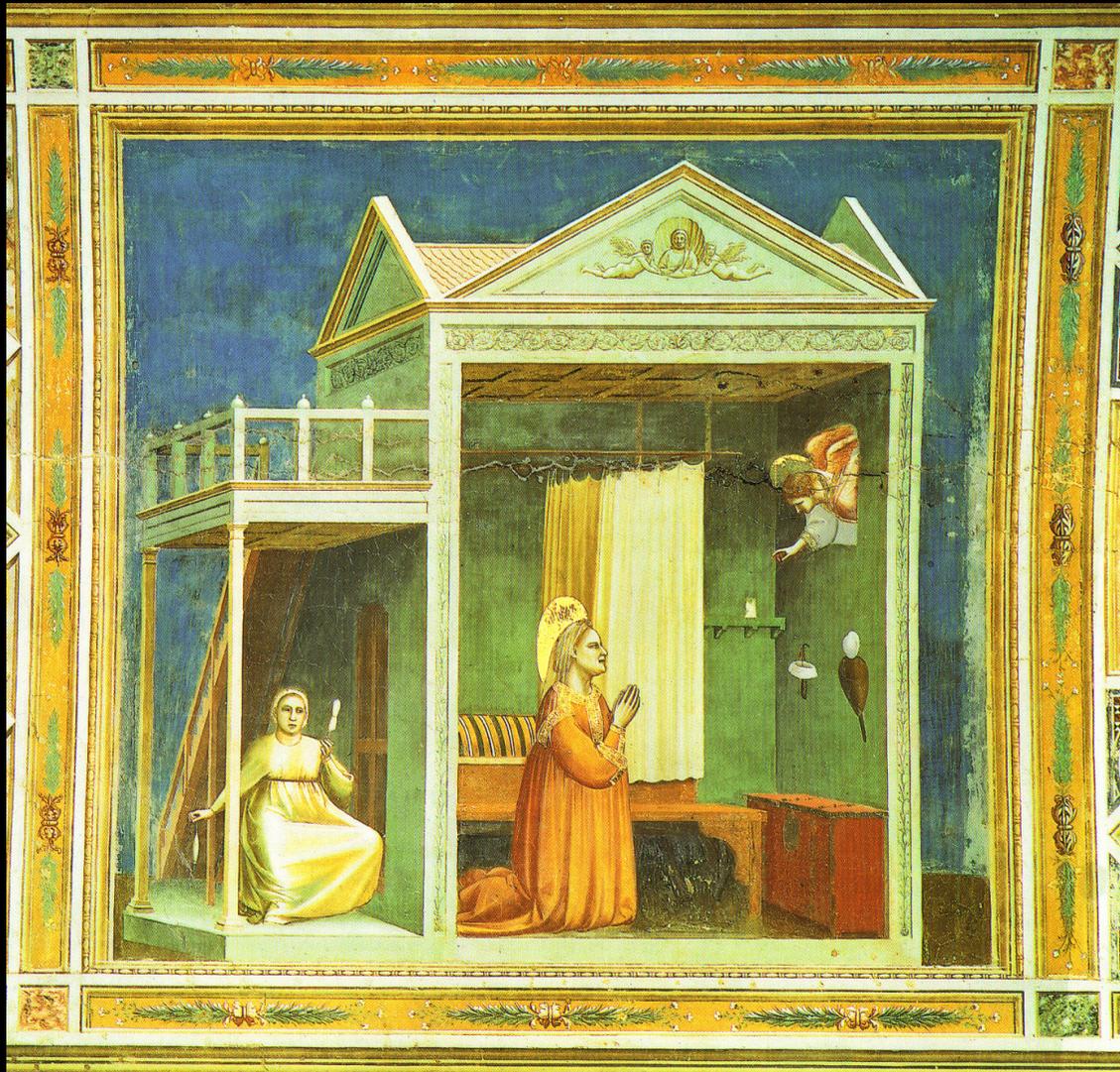
Dualität in projektiver Geometrie und Quantenmechanik

Der begriffliche Wechsel der Perspektive

Perspektive im Kubismus

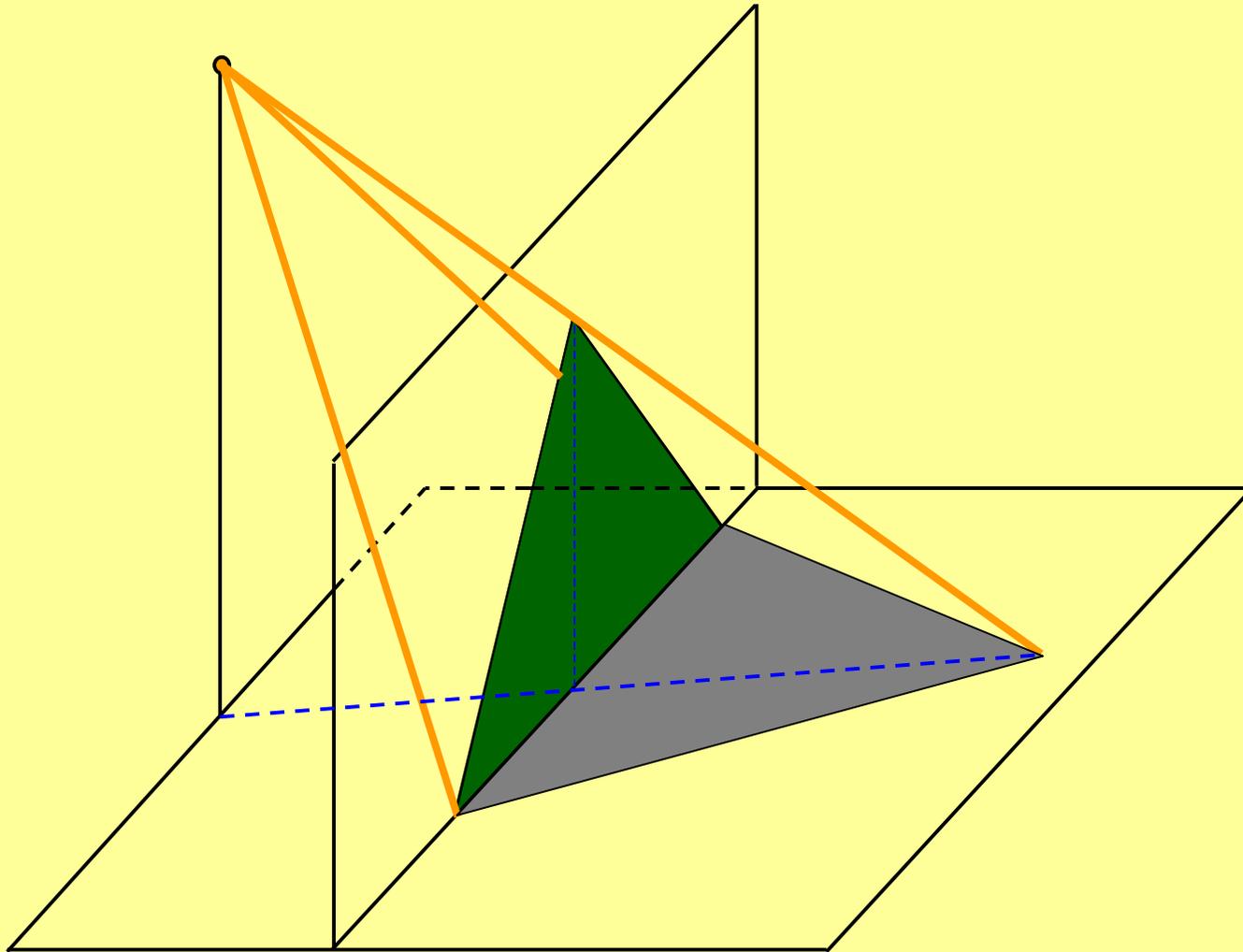
Die Uneindeutigkeit der Wirklichkeit

Perspektive in der Renaissance

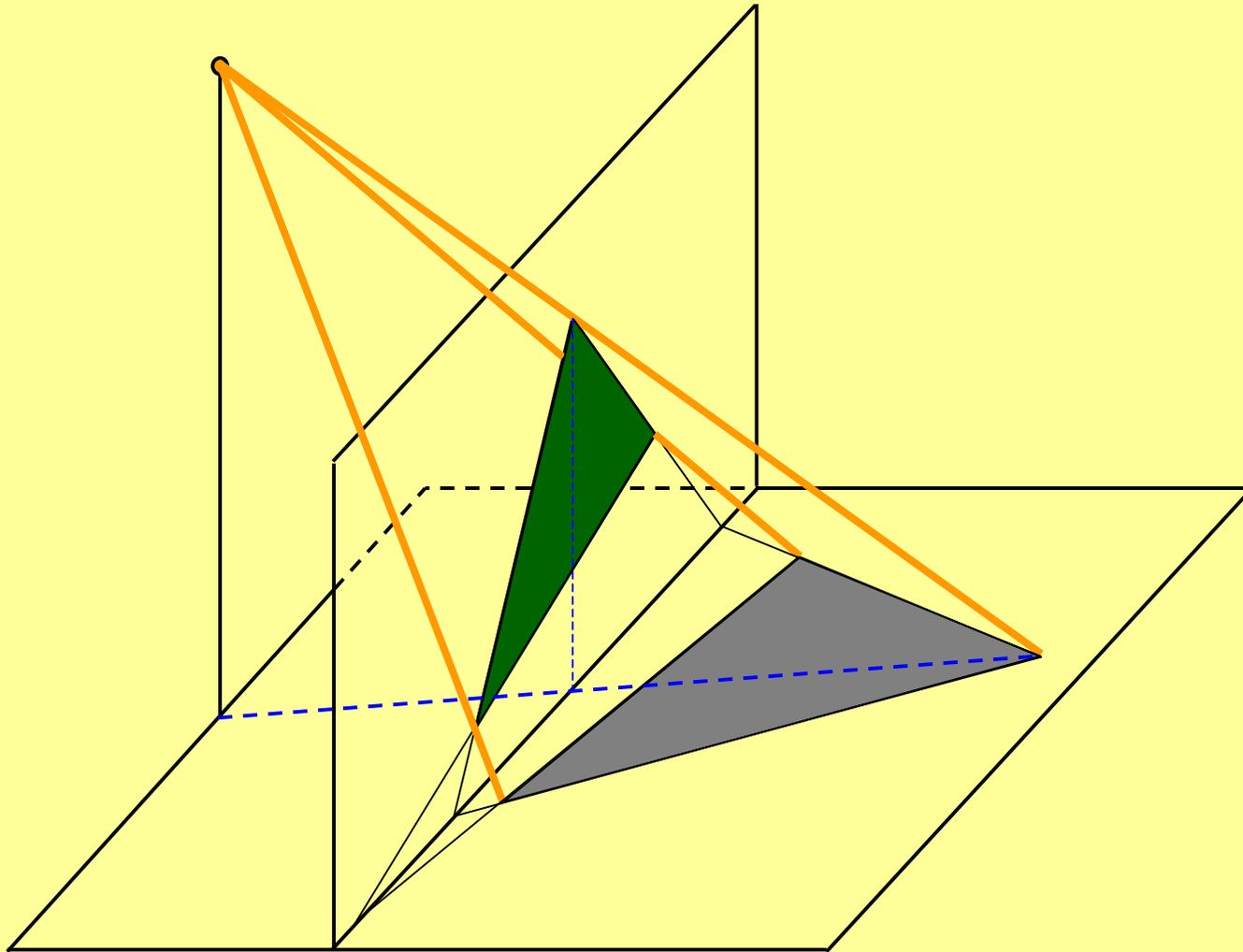


Giotto (1267-1337)
Die Verkündigung der hl. Anna
Arena Kapelle, Padua, 1303

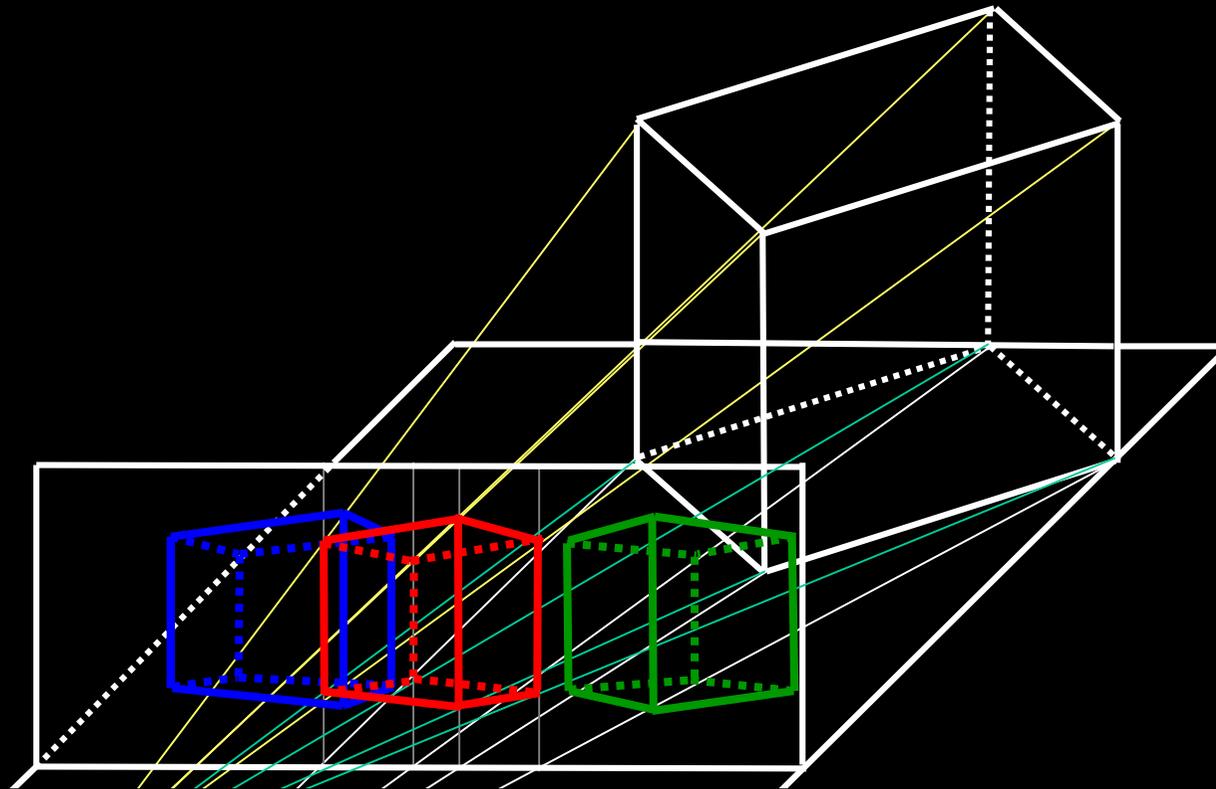
Schattenwurf



Schattenwurf



Leinwandprojektion

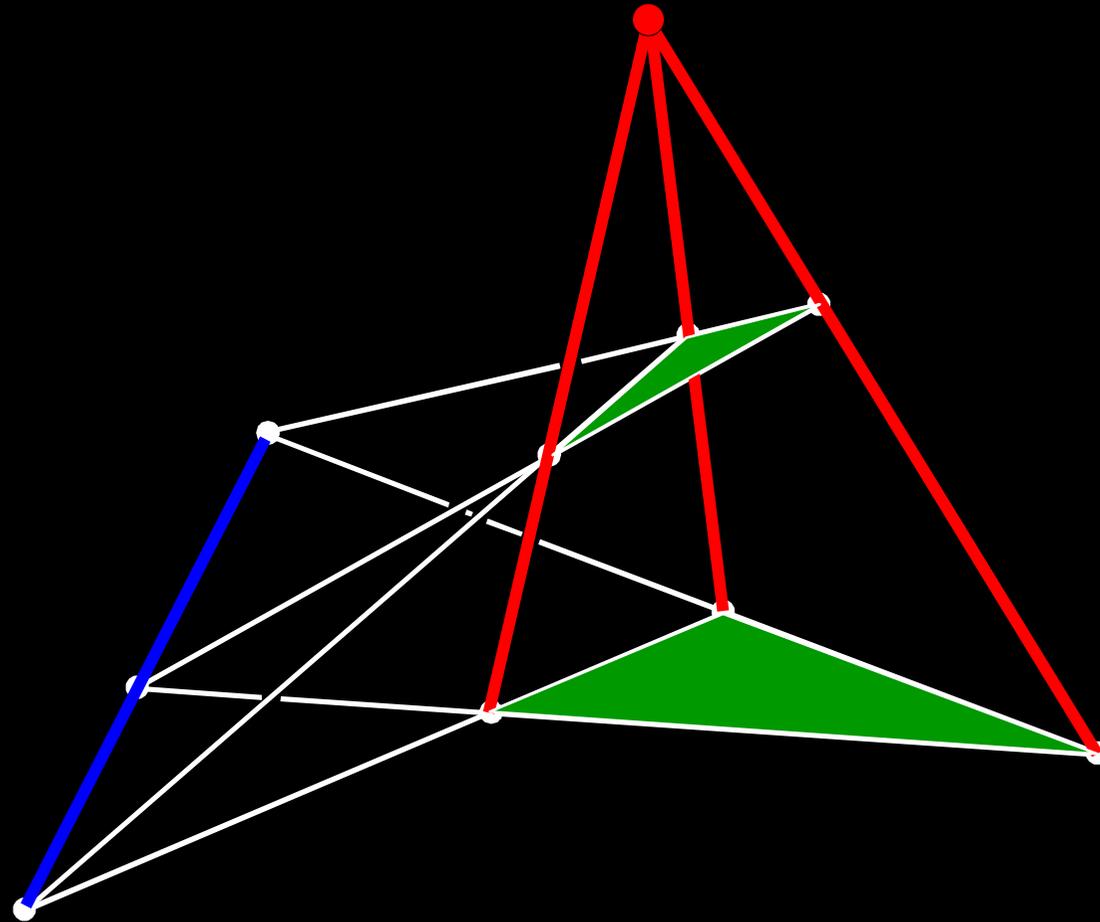


Rekonstruktion der Realität

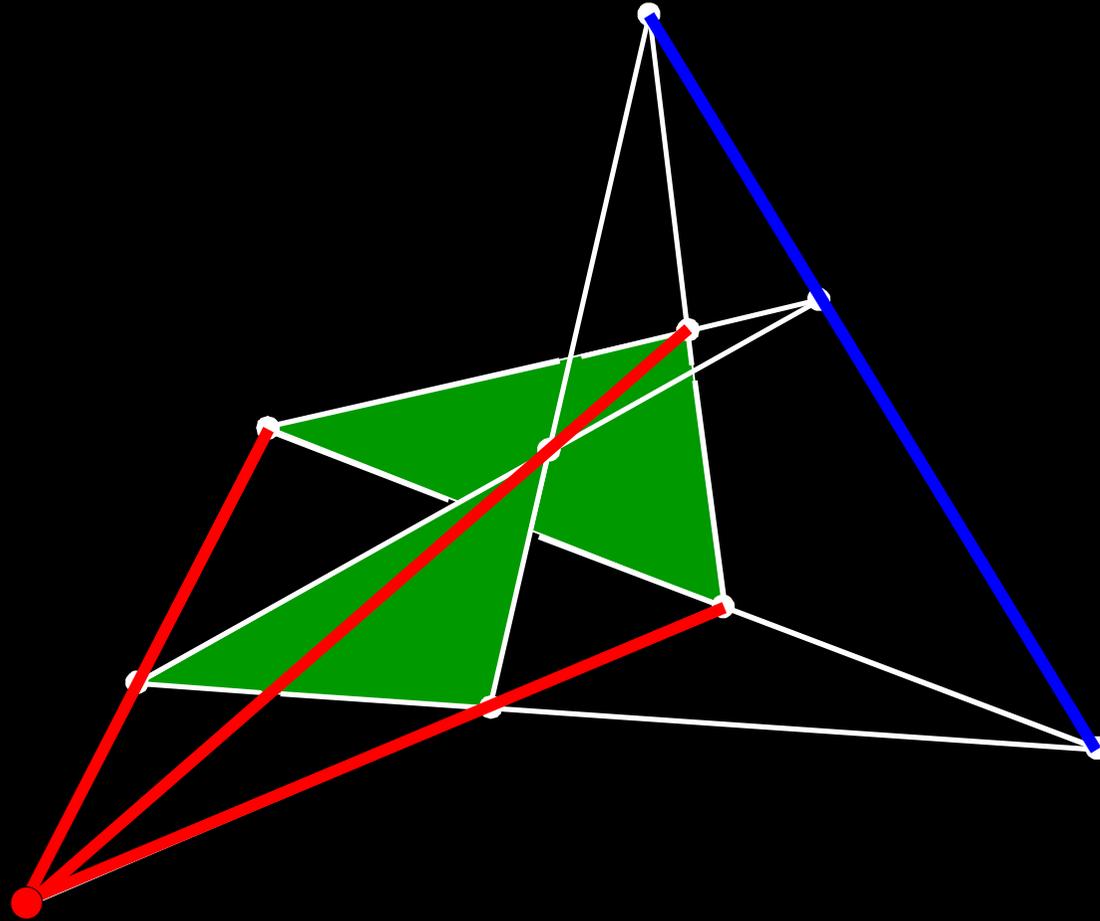
Aus den Ansichten des Gegenstandes wird ein räumliches Bild rekonstruiert

- beidäugiges Sehen
- Medizintechnik: CT, MRI, OCT, PET, SPECT, US,

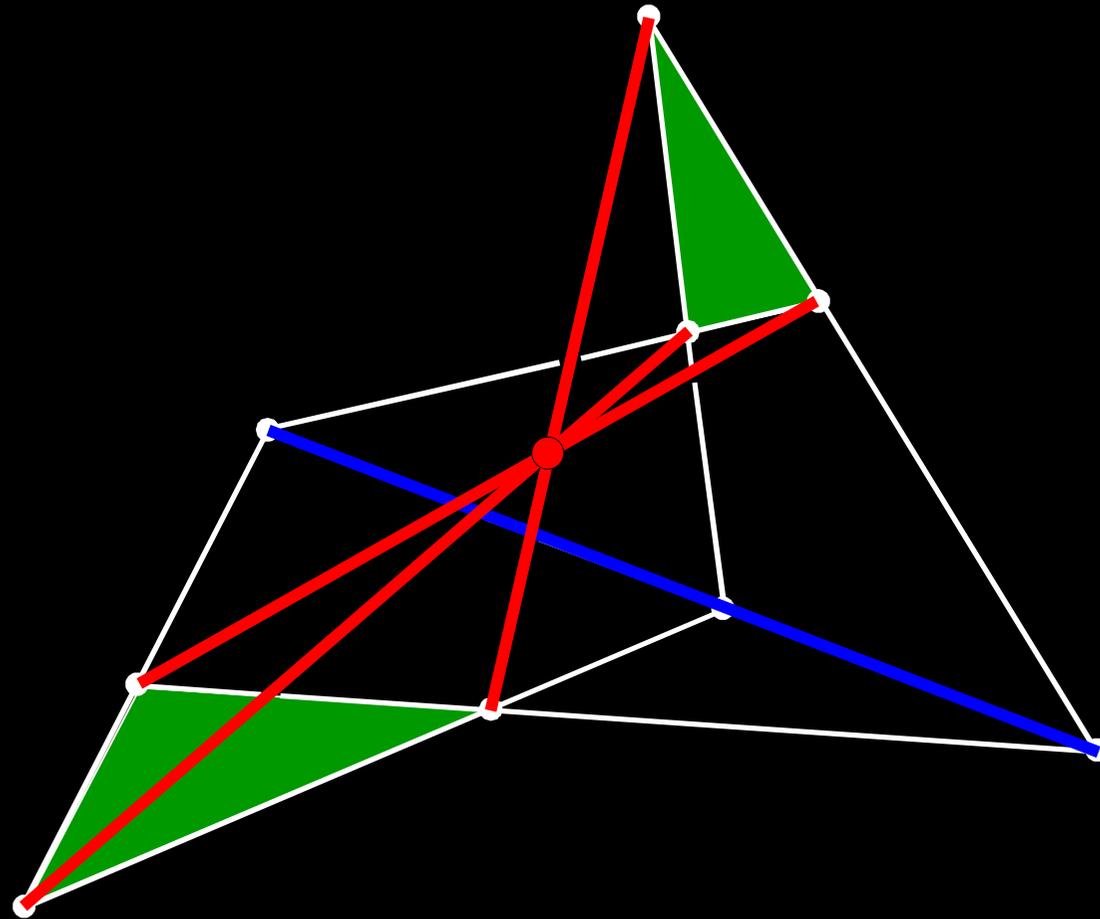
Gérard Desargues (1591-1661)



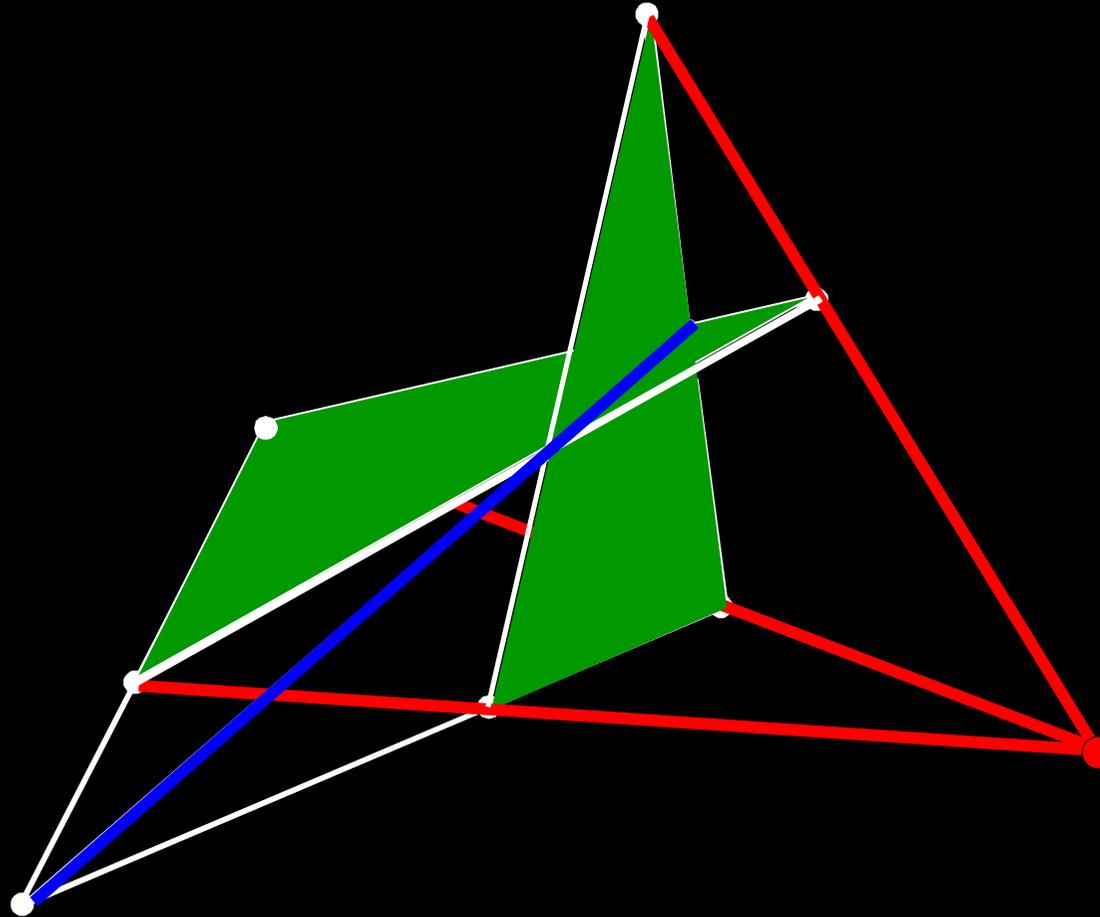
Gérard Desargues (1591-1661)



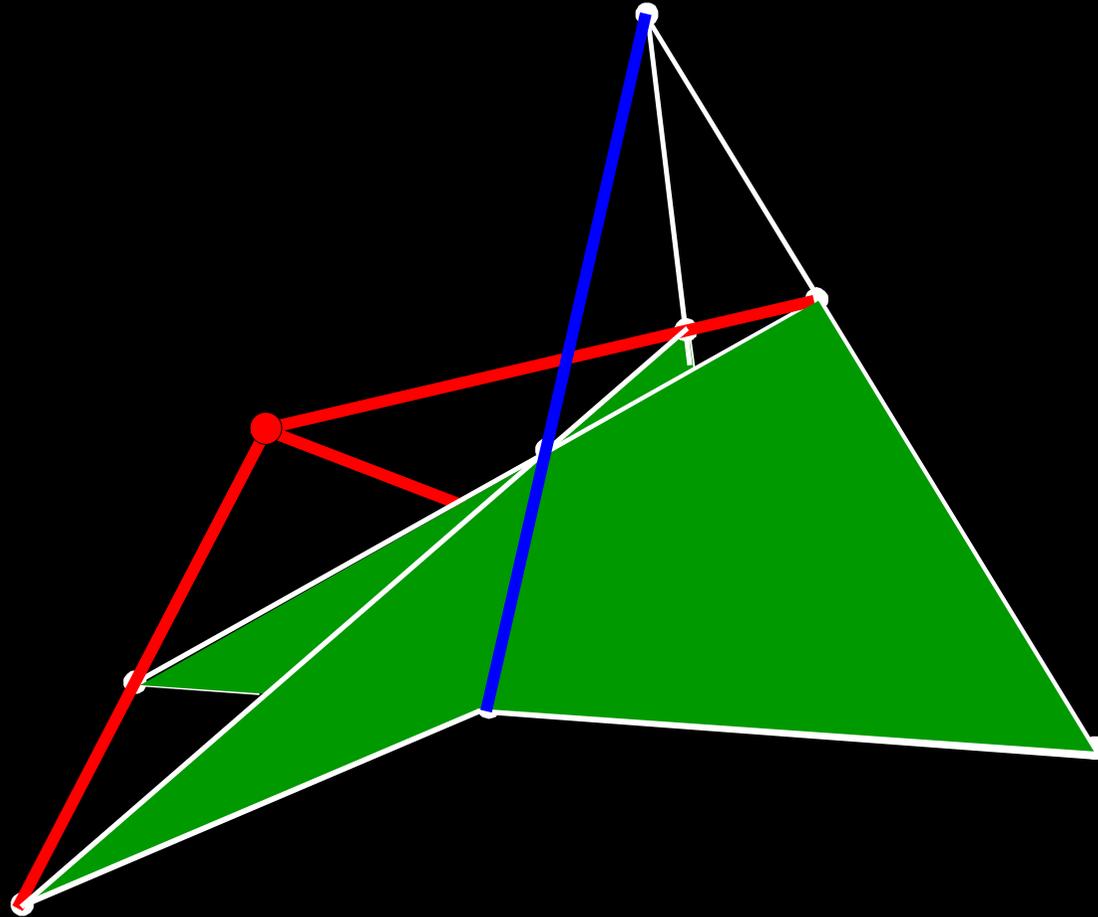
Gérard Desargues (1591-1661)



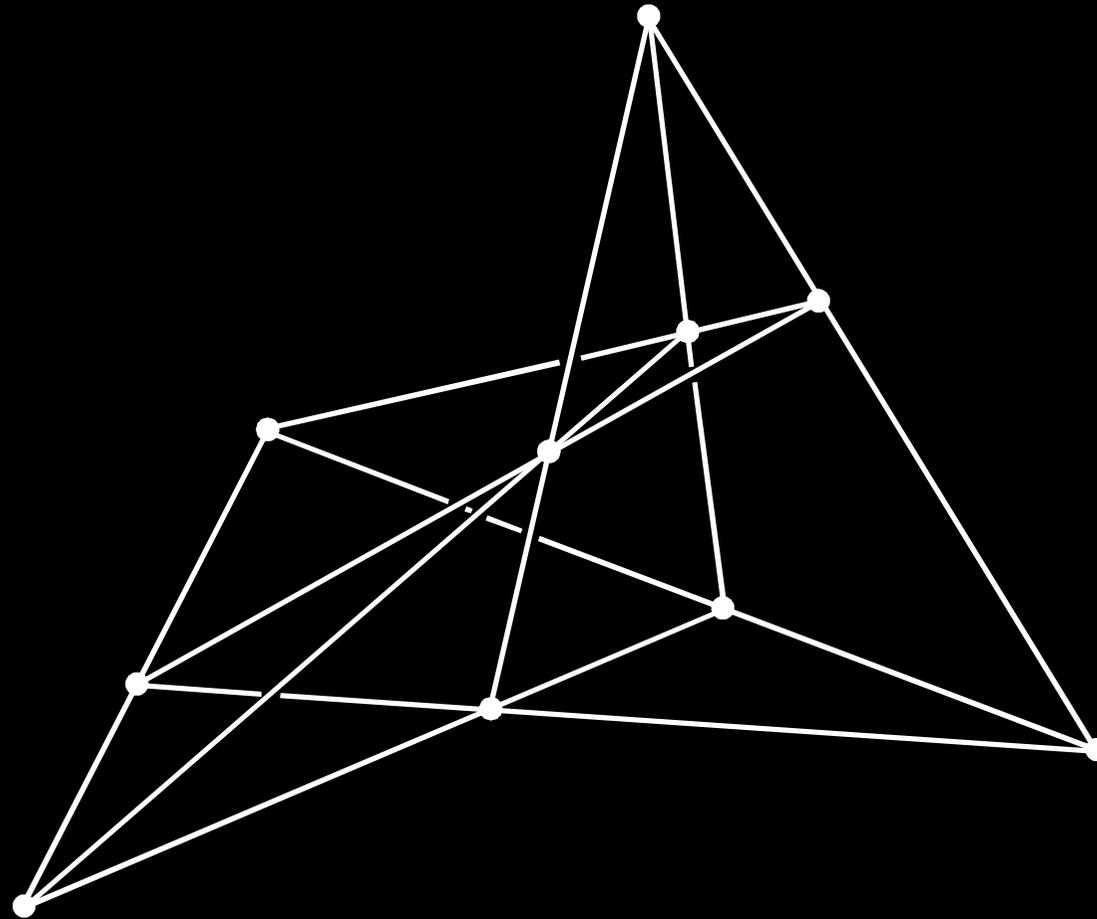
Gérard Desargues (1591-1661)



Gérard Desargues (1591-1661)



Gérard Desargues (1591-1661)



Ohne Standpunkt: Kein Begreifen der inneren Beziehungen

Mit Standpunkt: Einschränkung der Wahrnehmungsmöglichkeiten

Klassische Mechanik

System ist vollständig festgelegt durch

- Ort x *Wo?*
- Impuls p *Wohin?*
- Energiestruktur H (Hamiltonfunktion)

Zusammenhang:
Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Alternativ im Fall einer Schwingung:
statt Ort x und Impuls p

Amplitude A

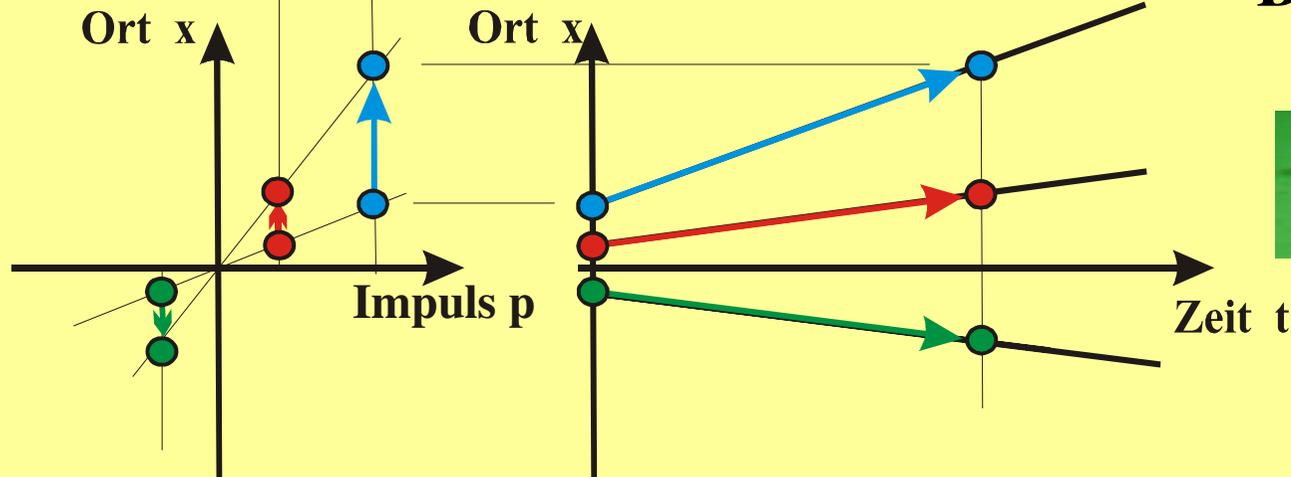
Wie groß?

Phase φ

Wann?

Klassische Mechanik

Freies Teilchen

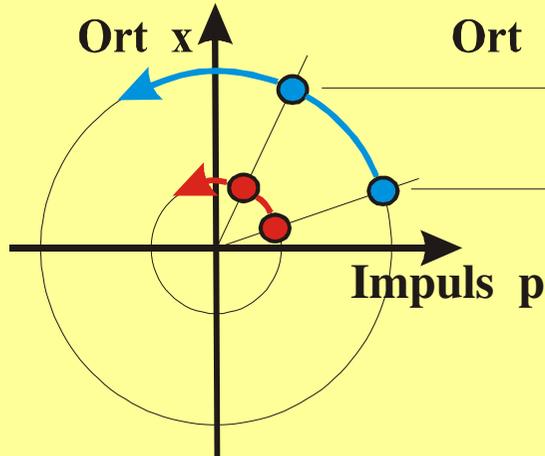


Billard

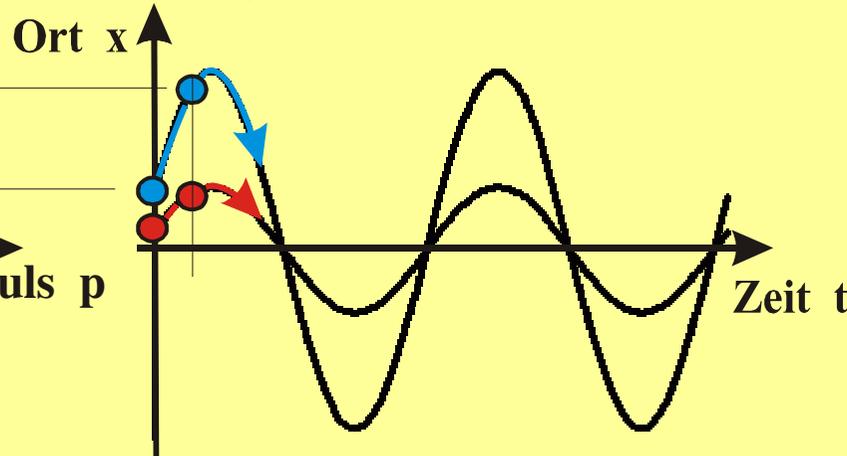


$$H = \frac{p^2}{2m}$$

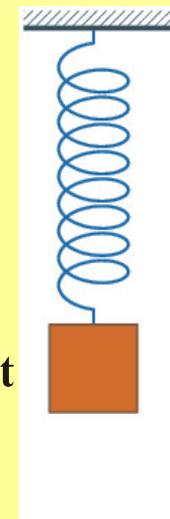
Phasenraum



Zeitdiagramm



Harmonische Schwingung



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Pendel

Quantenmechanik

Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf bestimmbar

System ist vollständig festgelegt durch

- Wellenfunktion $\psi(x, t)$ oder $\psi(p, t)$
- Energiestruktur H (Hamiltonoperator)

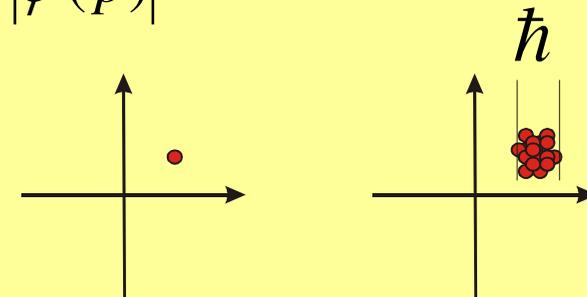
Zusammenhang: Bewegungsgleichung $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi$

Bedeutung: Ortsverteilung $P(x) = |\psi(x)|^2$
Impulsverteilung $P(p) = |\psi(p)|^2$

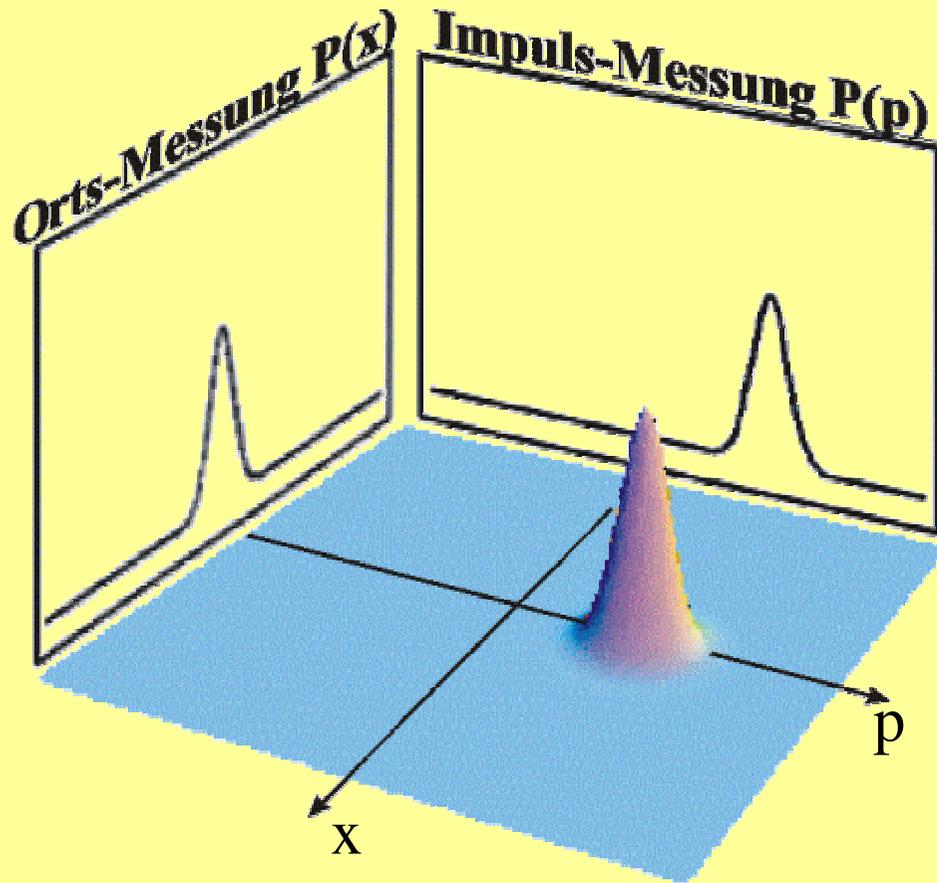
Folge im Phasenraum:

statt Punkt (x, p)

ein „Fleck“ $W(x, p)$, eine Verteilung



Messung eines Zustandes durch Projektion



Wignerfunktion

Quasiwahrscheinlichkeitsverteilung

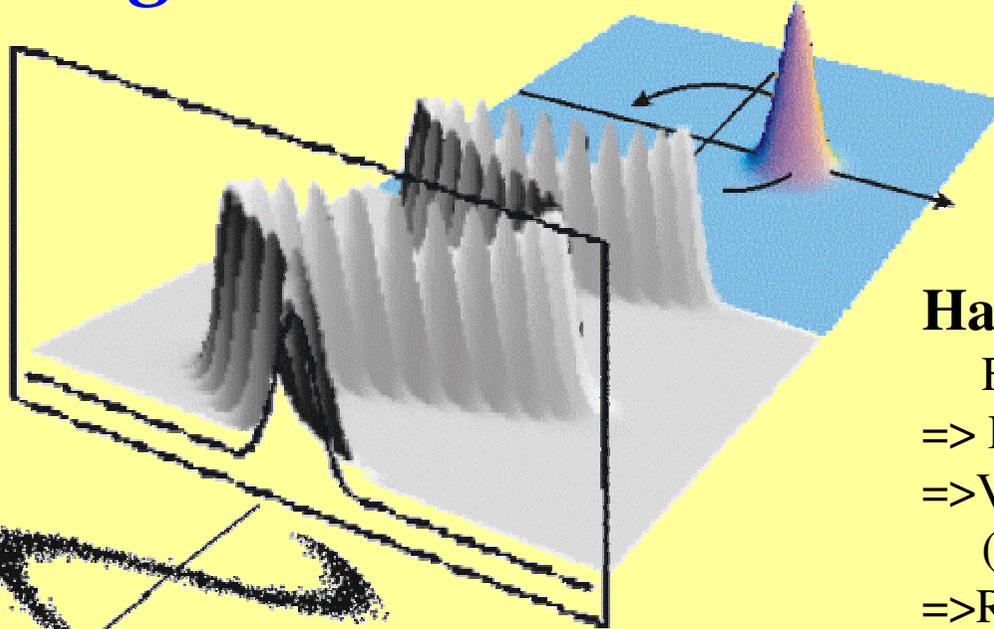
$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+y)\psi(x-y)e^{2ipy/\hbar} dy$$

Marginalverteilungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp = |\psi(x)|^2 = P(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx = |\psi(p)|^2 = P(p)$$

Messung eines Zustandes durch Projektion



Beispiel

Harmonischer Oszillator

Freie Zeitentwicklung

=> Drehung des Zustandes

=> Verschiedene „Ansichten“
(Dichteprojektionen)

=> Rekonstruktion des Zustandes:
Inverse Radon Transformation

Rechnung

$$x_{\vartheta} = x \cos(\vartheta) + p \sin(\vartheta)$$

$$p_{\vartheta} = -x \sin(\vartheta) + p \cos(\vartheta)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x_{\vartheta}, p_{\vartheta}) dp_{\vartheta} = P(x_{\vartheta})$$

$$W(x, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dr |r| P_{\vartheta}(x') \exp[ir(x' - x_{\vartheta})]$$

Johann Radon 1917

K. Vogel, H. Risken, PRA **40**, 2847 (1989)

M. Raymer et al., PRL **72**, 2183 (1994)

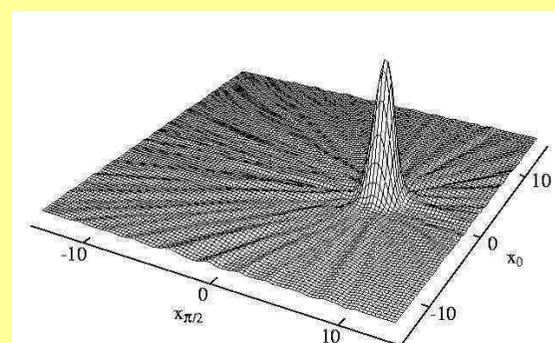
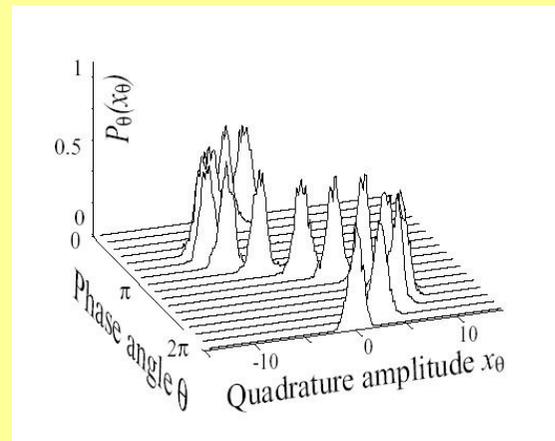
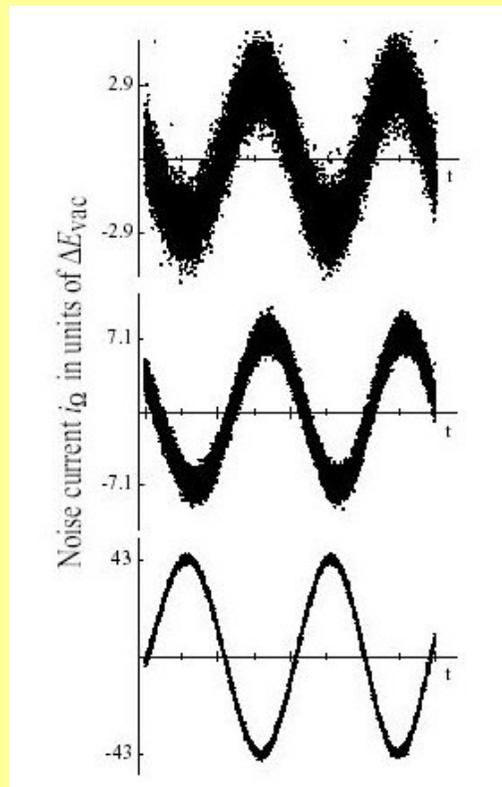
Experiment: Vermessung von Lichtwellen

Klassische Schwingung: Sinuskurve

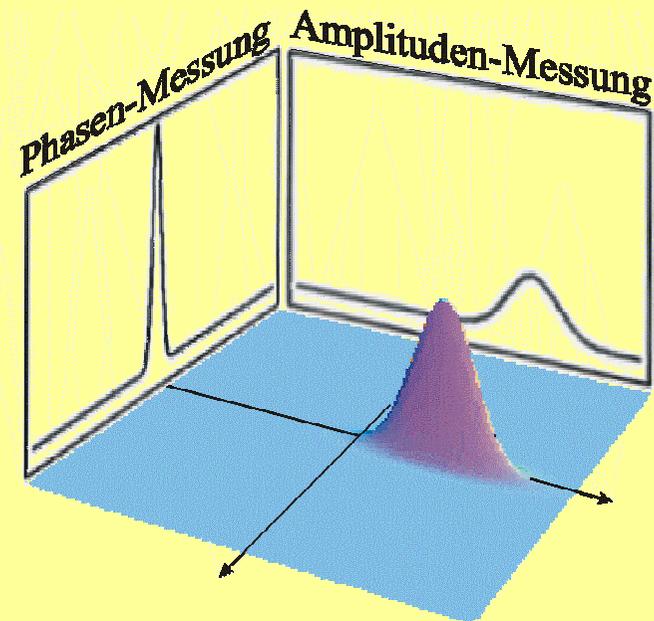
Quantenmechanisch: Unvermeidbare Phasen- und Amplitudenunschärfe

Gemessen wird das elektrische Feld einer äußerst schwachen Lichtwelle

Idealer Laser: Kohärenter Zustand

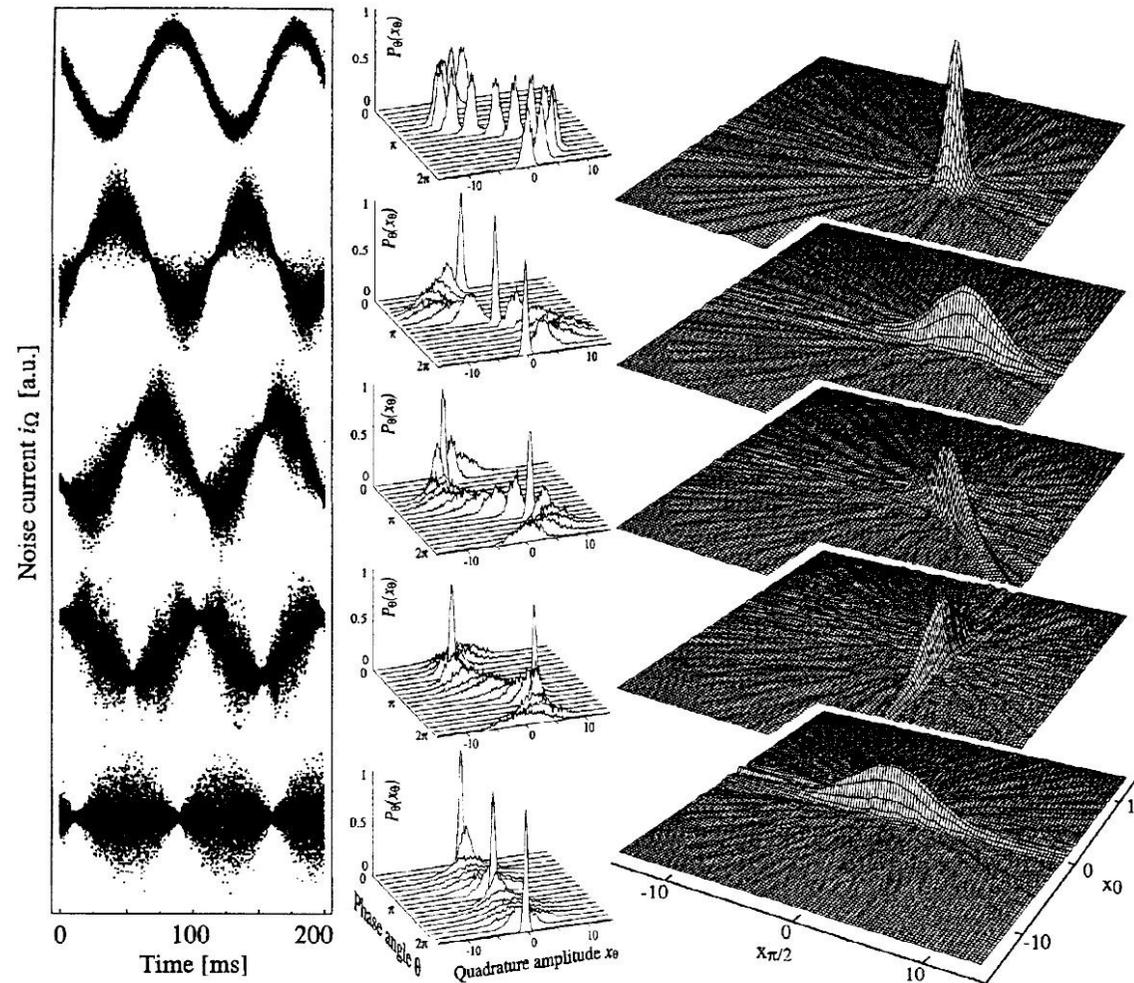


Aber: Unschärfe nicht unbedingt gleichverteilt

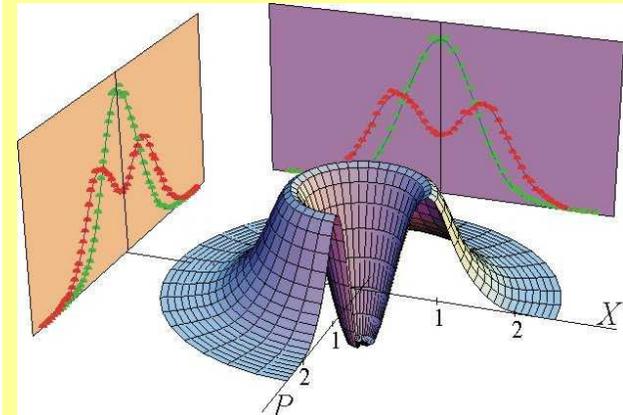
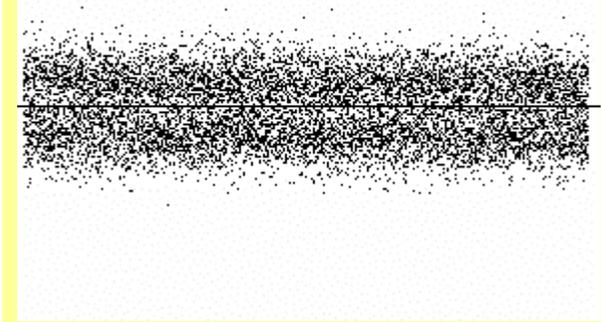


Experiment: Vermessung von Lichtwellen

Präparation der Lichtwelle durch nichtlineare Medien



Ein-Photon-Zustand



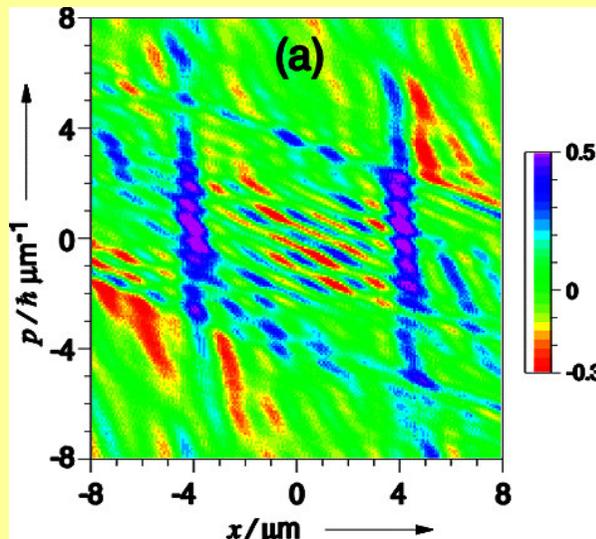
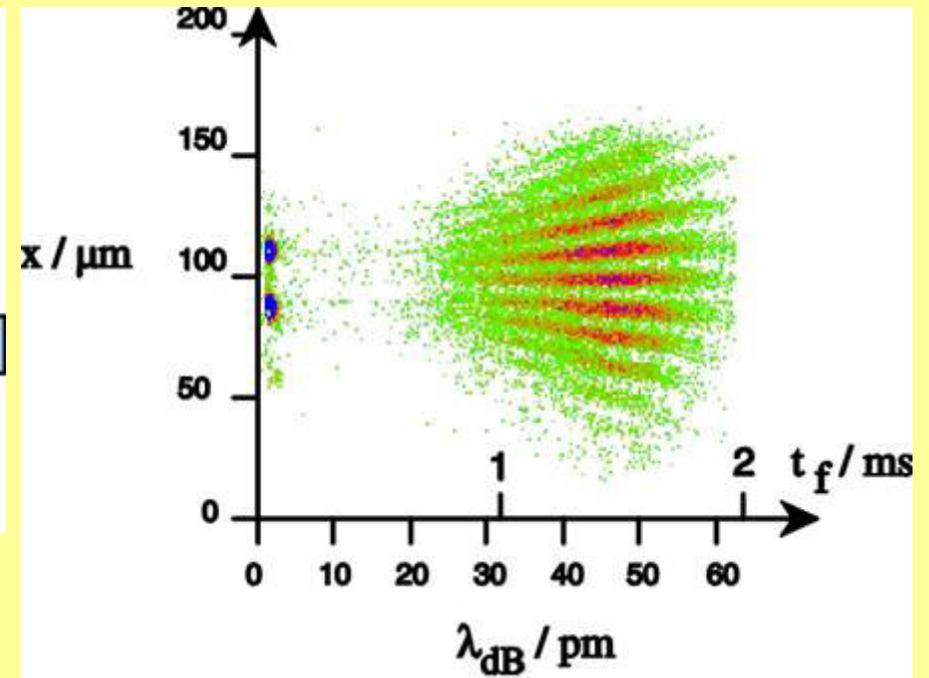
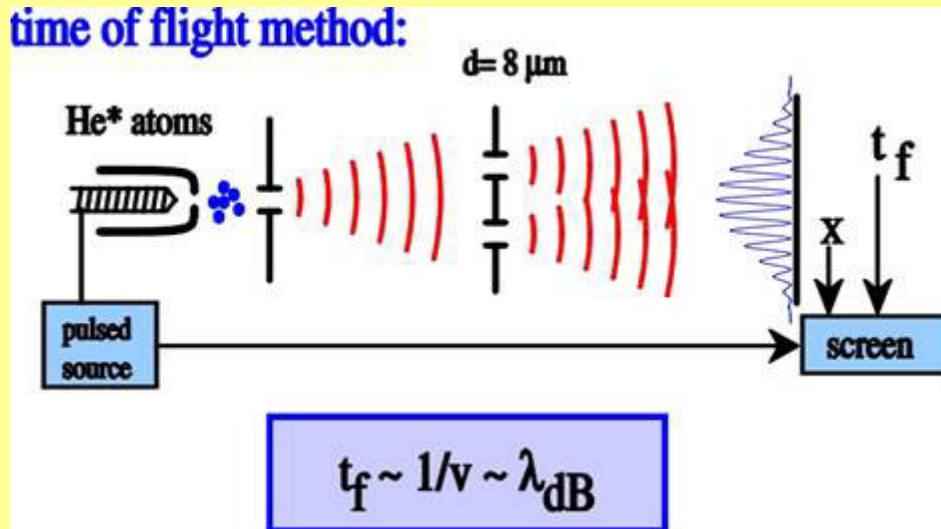
A.I. Lvovsky et al. Phys. Rev. Lett. 87, (2002);

G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek, Nature, 387, 471 (1997);

Lvovsky, Raymer, Rev. Mod. Phys., 81, 2009

Experiment: Beugung He-Atom an Doppelspalt

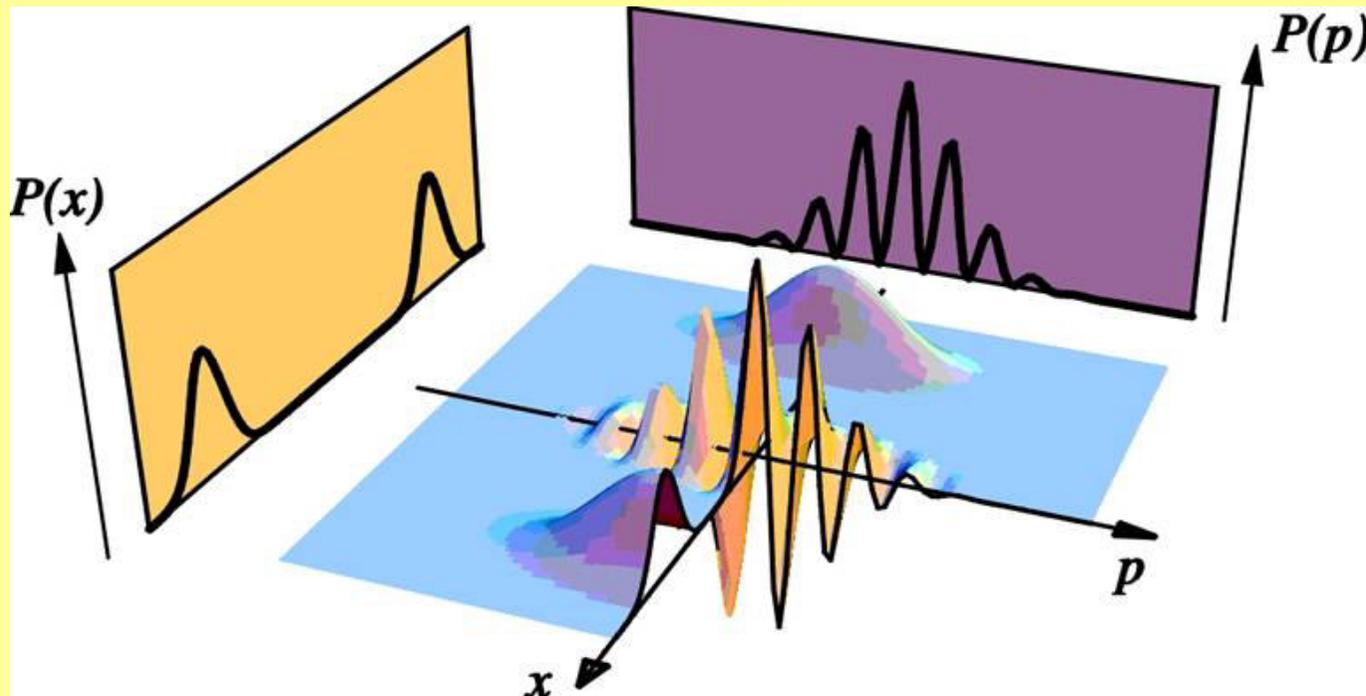
time of flight method:



Ch. Kurtsiefer, T. Pfau, J. Mlynek, Nature 386, 150 (1997)

Experiment: Beugung He-Atom an Doppelspalt

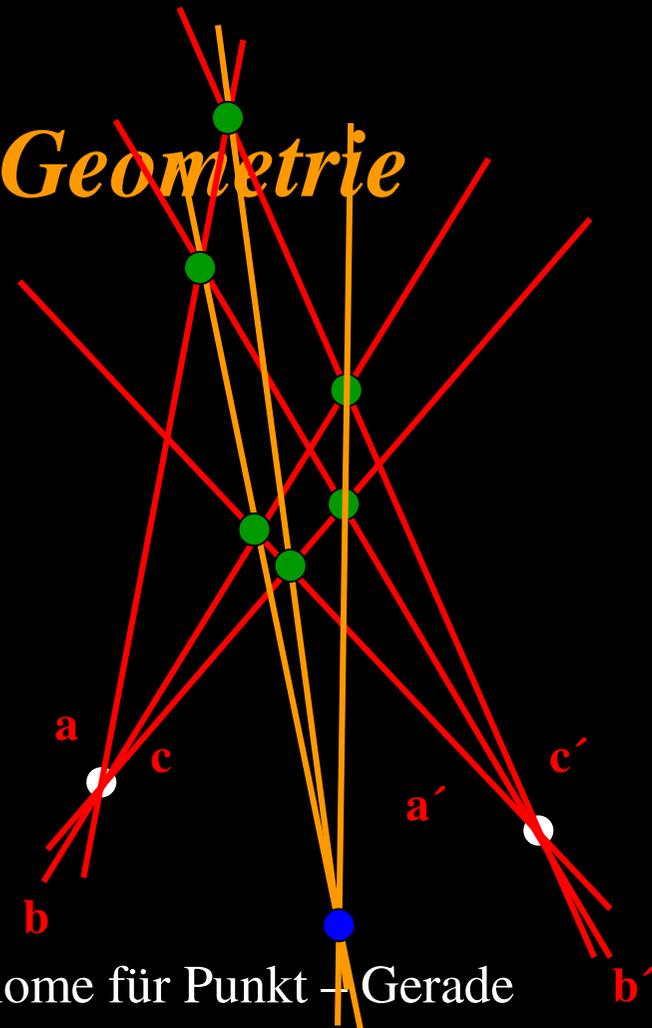
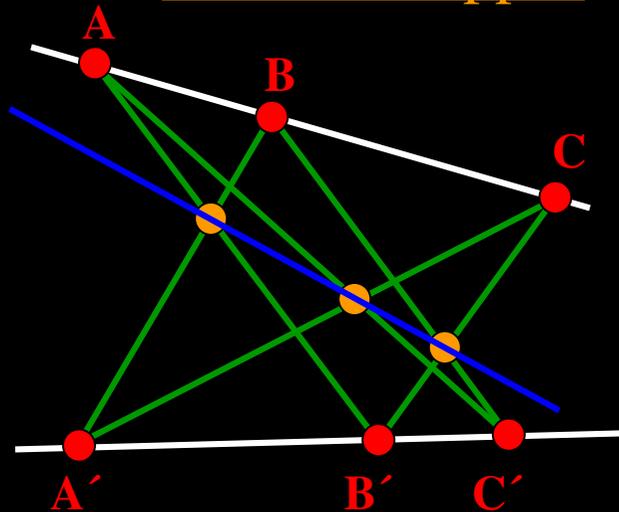
Wignerfunktion eines Atoms direkt am Doppelspalt
Je nach Blickrichtung Information über
möglichen Aufenthaltsort oder inhärente Interferenzfähigkeit



Verteilungsfunktion mit negativen Bereichen

Dualität, projektive Geometrie

Satz von Pappos



Ebene projektive Geometrie: Symmetrie der Axiome für Punkt + Gerade
 \Rightarrow durch Vertauschung der Begriffe entstehen neue geometrische Sätze
 \Rightarrow begrifflicher Standpunktwechsel (D. Hilbert)

Mathematischer Sachverhalt: Derselbe

Verwirklichung in der Vorstellung: Vollkommen anders

Was ist die Realität?

Dualität, Quantenmechanik

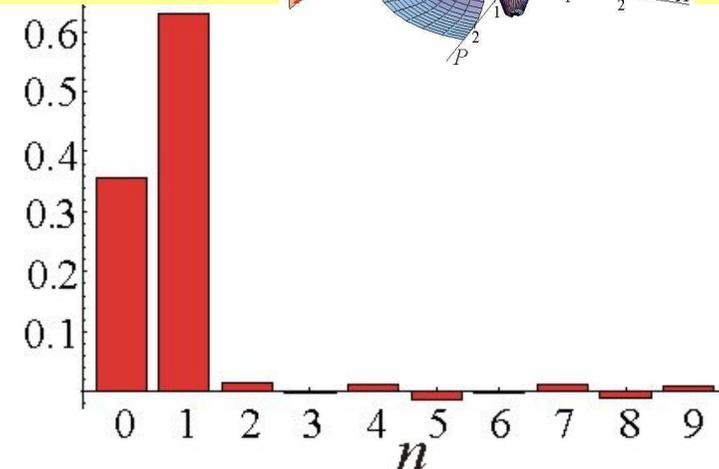
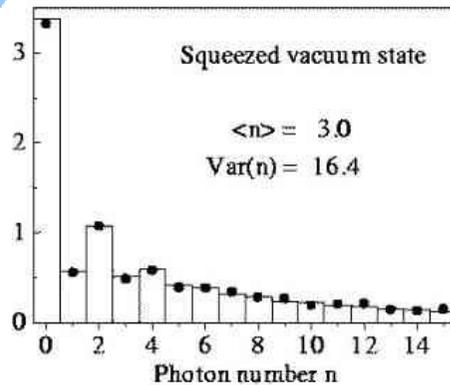
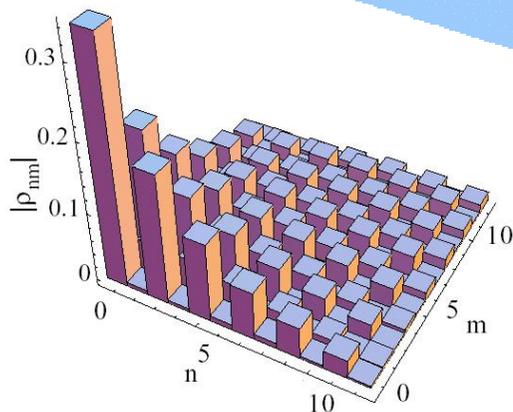
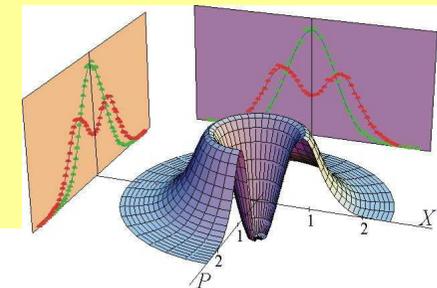
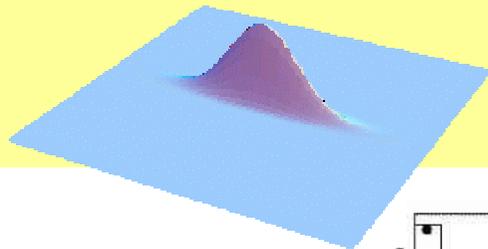
Basiswechsel $|x\rangle \rightarrow |n\rangle$ Ortsbasis zu Energiebasis

Zusammenhang: $\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}} H_n(x) \exp(-x^2/2)$ (H_n Hermite)

Klassisches Analogon: Zerlegung einer Bewegung in Schwingungen

Begriffswechsel: Amplitude, Phase \rightarrow Photonenzahl

Wignerfunktion zu Dichteoperator in Fockraum



Zusammenfassung

Klassische Perspektive: Versuch der Darstellung / Rekonstruktion einer unabhängig vom Betrachter eindeutig existierenden Welt

Quantenmechanik: Beobachtung = einmalige Projektion
Ausgang einer Messung / angenommene Modellvorstellung der Welt
abhängig von Messinstrument und Projektionsrichtung

Realität, eine rein individuelle Angelegenheit?

Ja: Das Bestehen verschiedener Realitätsauffassungen ist durch Wechsel der Perspektive in der Geometrie konkret erfahrbar

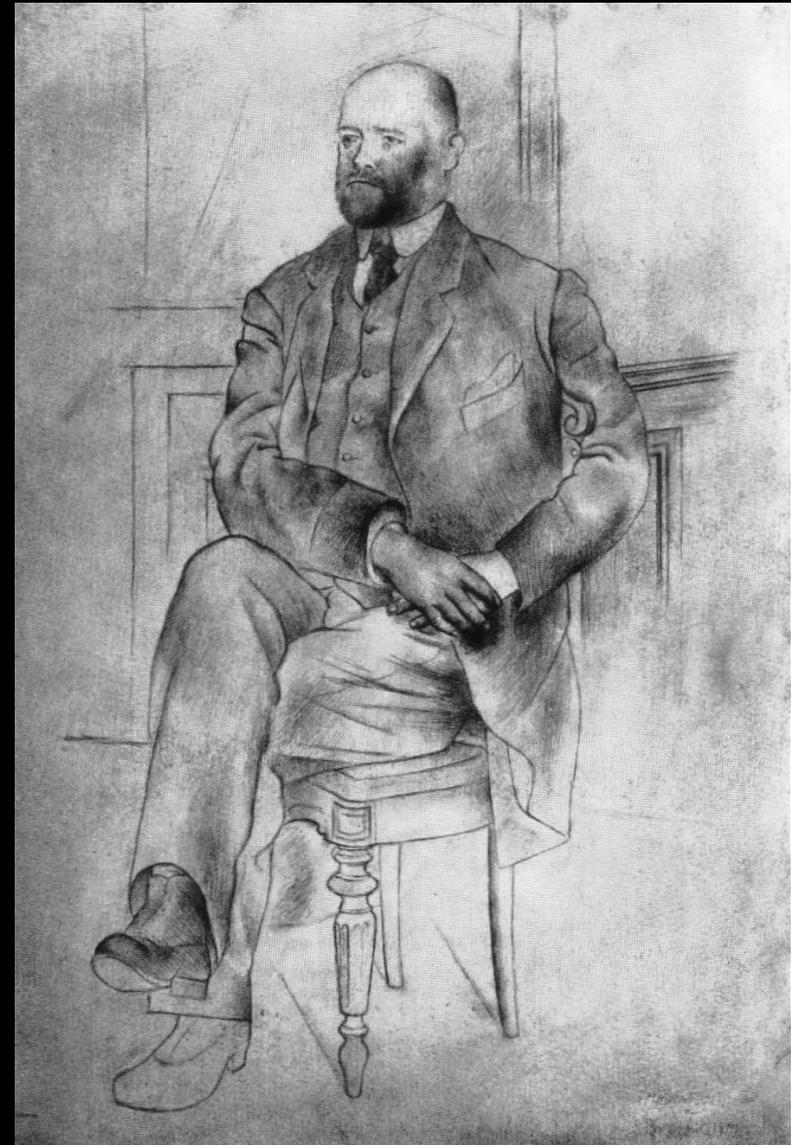
Nein: Nicht jede Perspektive ist einnehmbar (Bsp.: Dreieck / Viereck)

Kubismus: Künstlerischer Versuch der „Überwindung“ der Perspektive
Arbeite verschiedene Betrachtungsweisen in ein Gemälde ein
Fordere Betrachter zu eigenständiger Rekonstruktion auf



1906

Pablo Picasso (1881-1973)
Bildnis Wilhelm Uhde
1910



1915

**Pablo Picasso (1881-1973)
Bildnis Ambroise Vollard
1909 / 10**



**Foto David-Henry Kahnweiler 1912
Juan Gris**

Skizze David-Henry Kahnweiler

**Pablo Picasso (1881-1973)
Bildnis David-Henry Kahnweiler
1910**



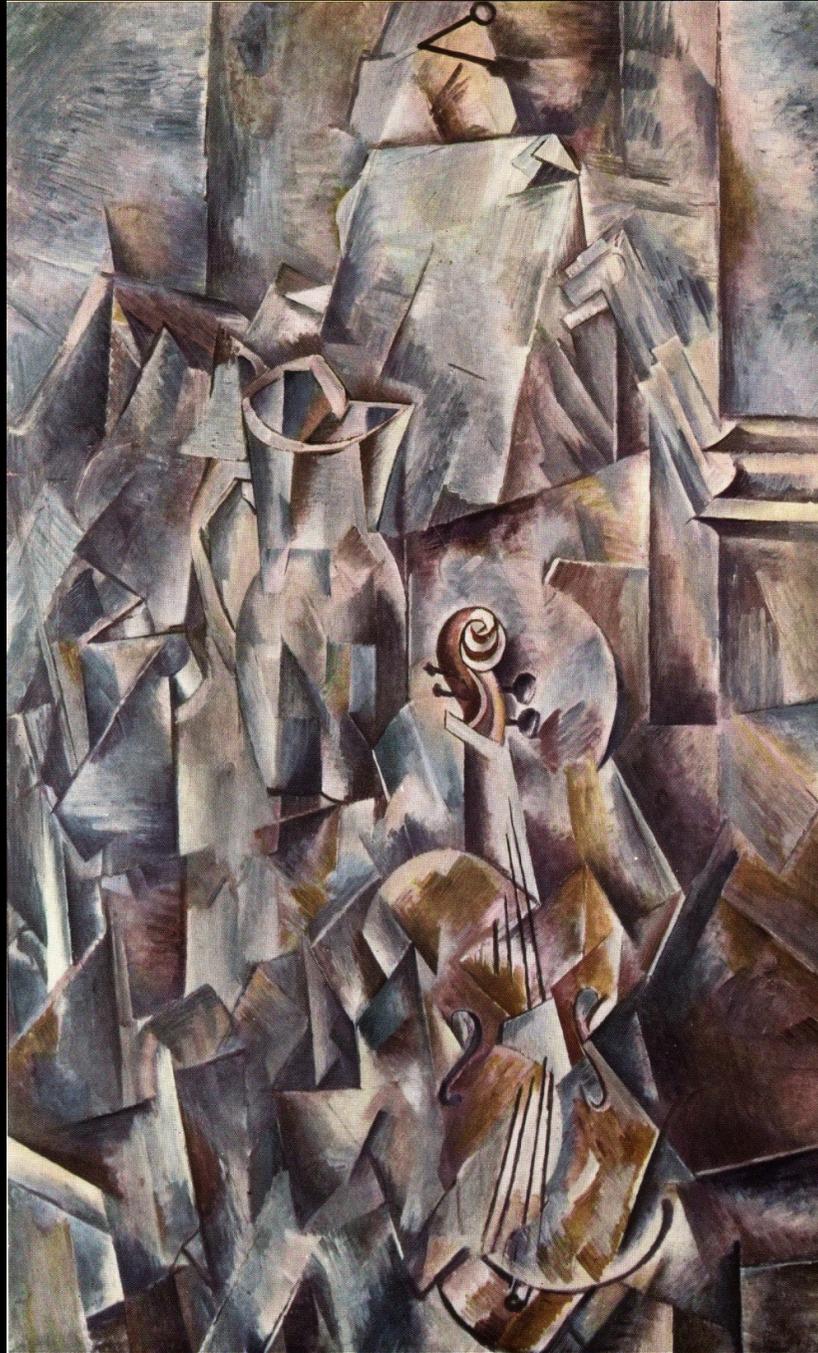
Juan Gris (1887–1927)
Bildnis Picasso, 1912

*Unser Kopf ist rund, damit das Denken
die Richtung ändern kann*

Francis Picabia (1879-1953)

Ende

Zusatzfolien



George Braque (1882–1963)
Violine und Krug 1912



Marcel Duchamp (1887–1968)
Akt, eine Treppe herabsteigend
1912



Kasimir Malewitsch (1878-1935)
Der Scherenschleifer
1906



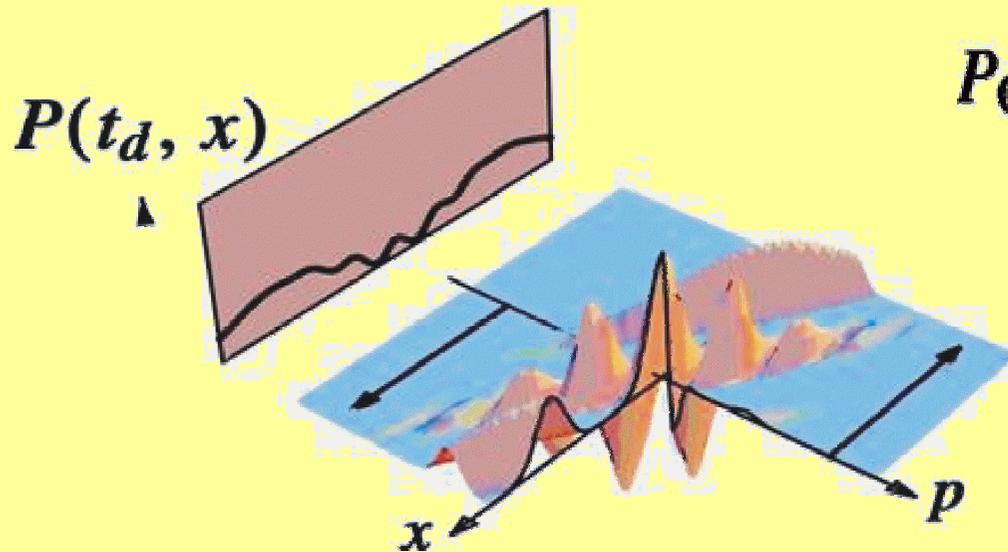
Pablo Picasso (1881-1973)
Les Femmes d'Alger (O. J.)
1906

Messung eines Zustandes durch Projektion

Verschiedene Perspektiven

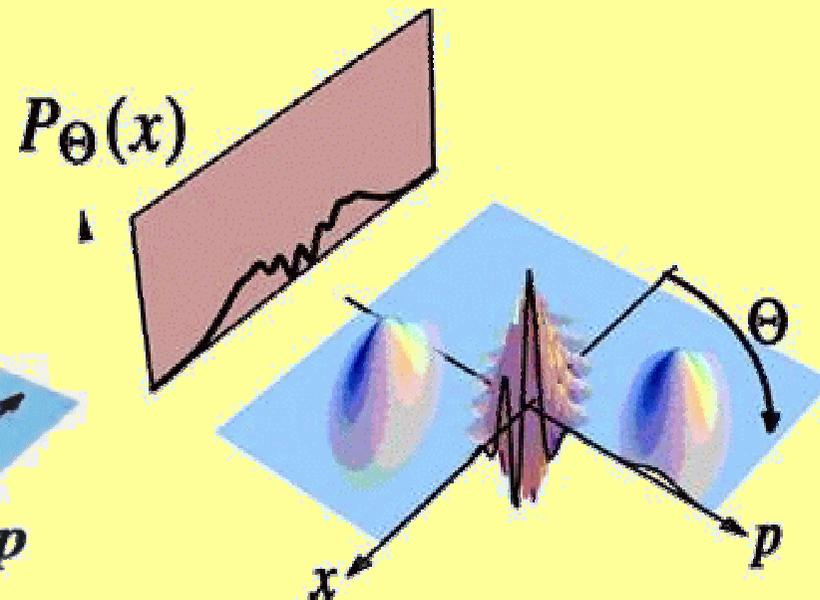
Freies Teilchen

Auseinanderlaufen / Scherung



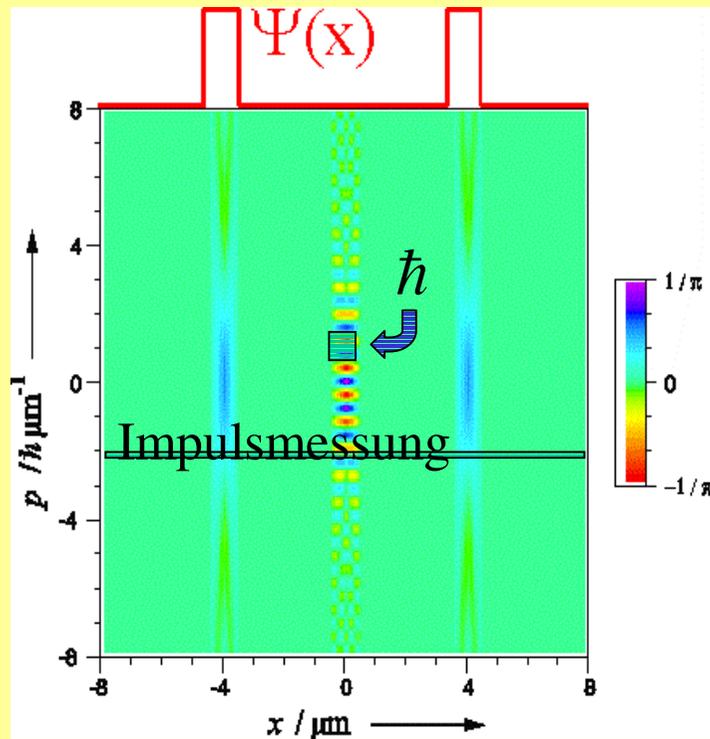
Harmonischer Oszillator

Drehung

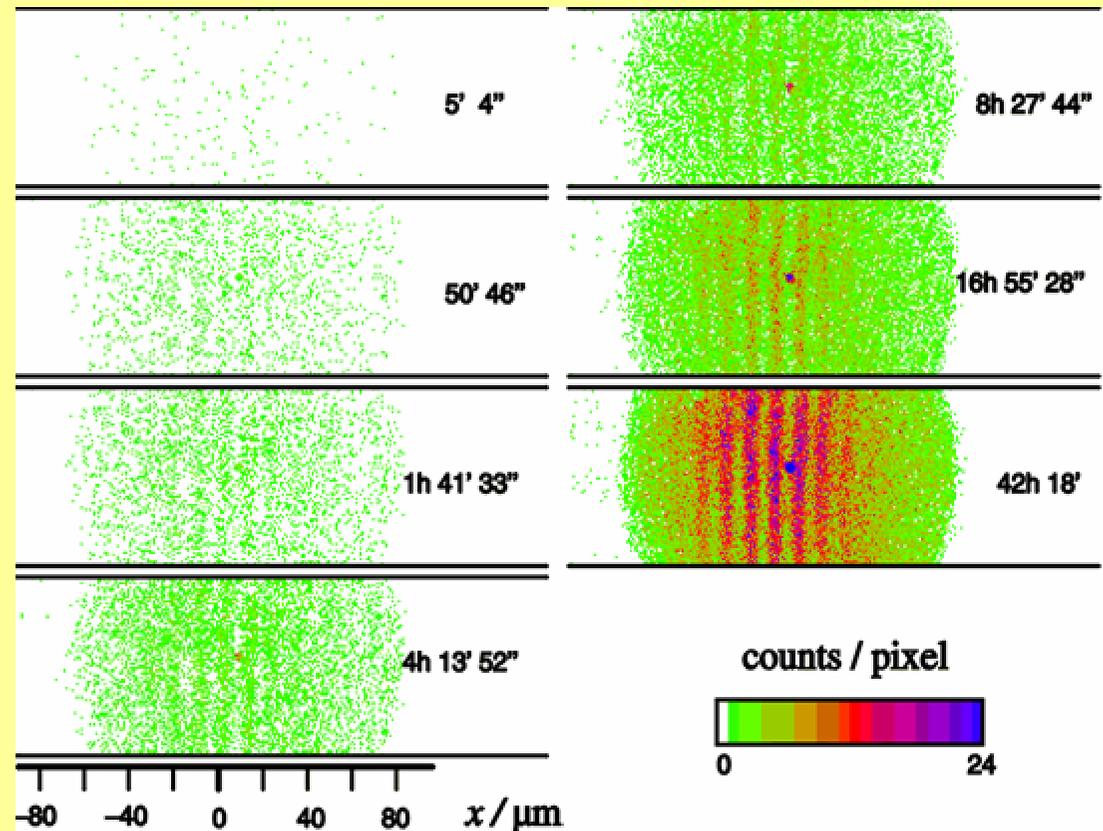


Experiment: Beugung He-Atom an Doppelspalt

Details Theorie

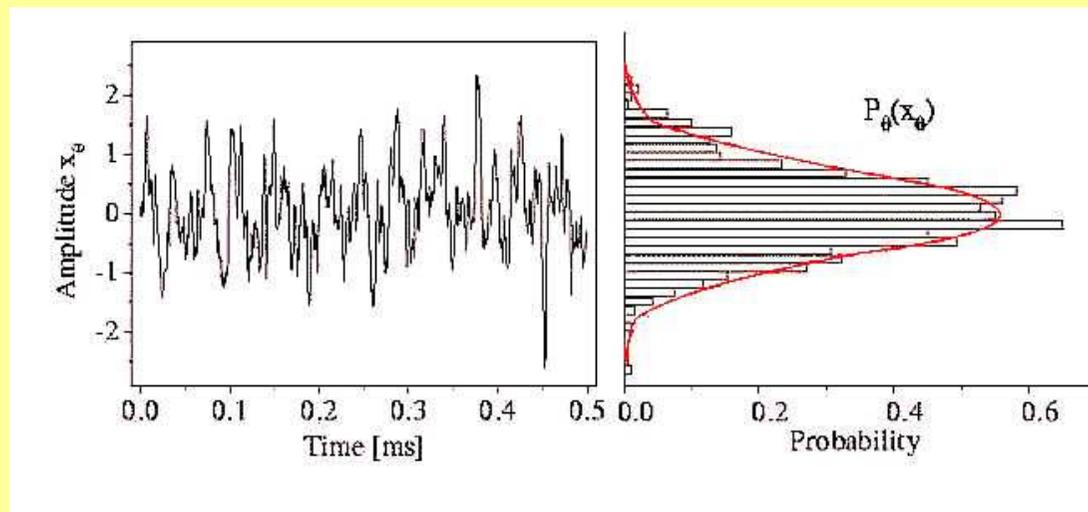
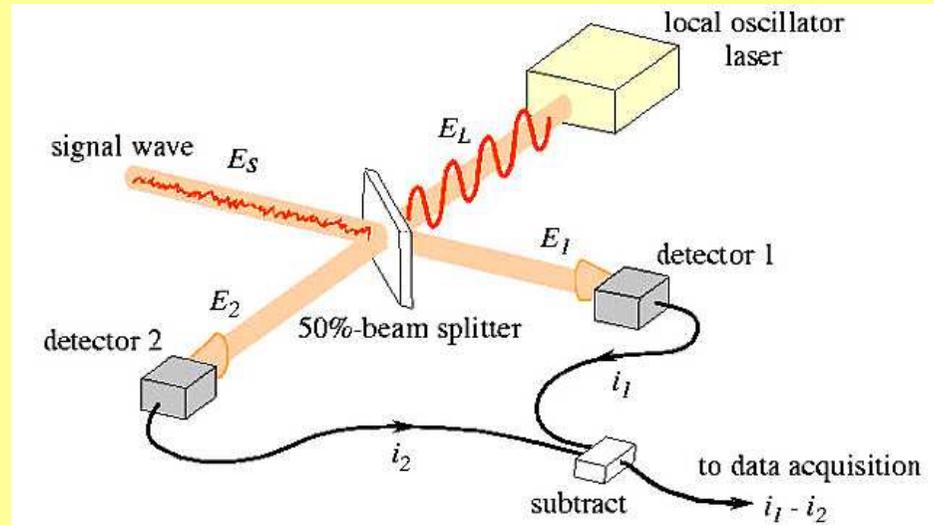


Aufbau des Beugungsmusters



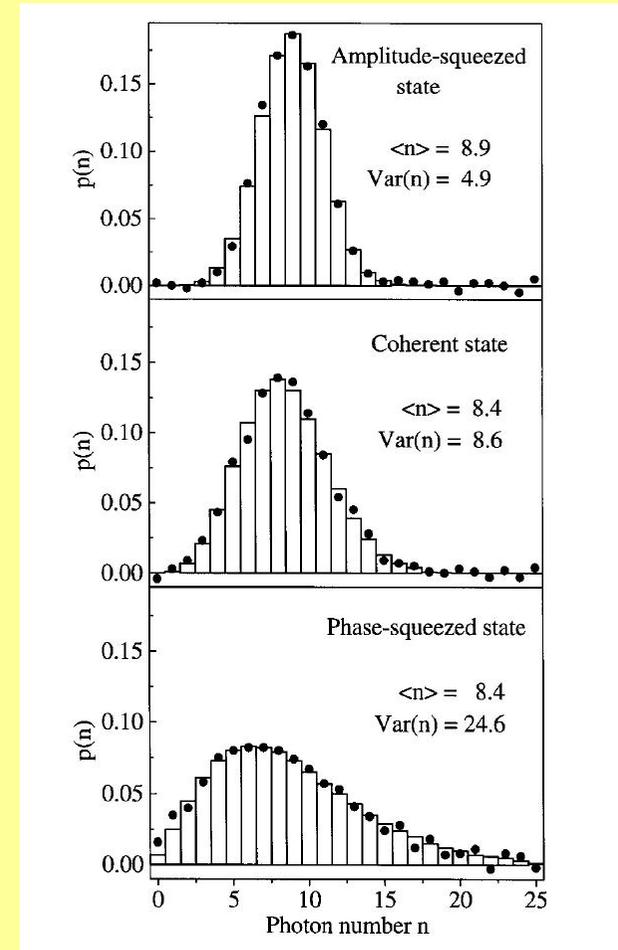
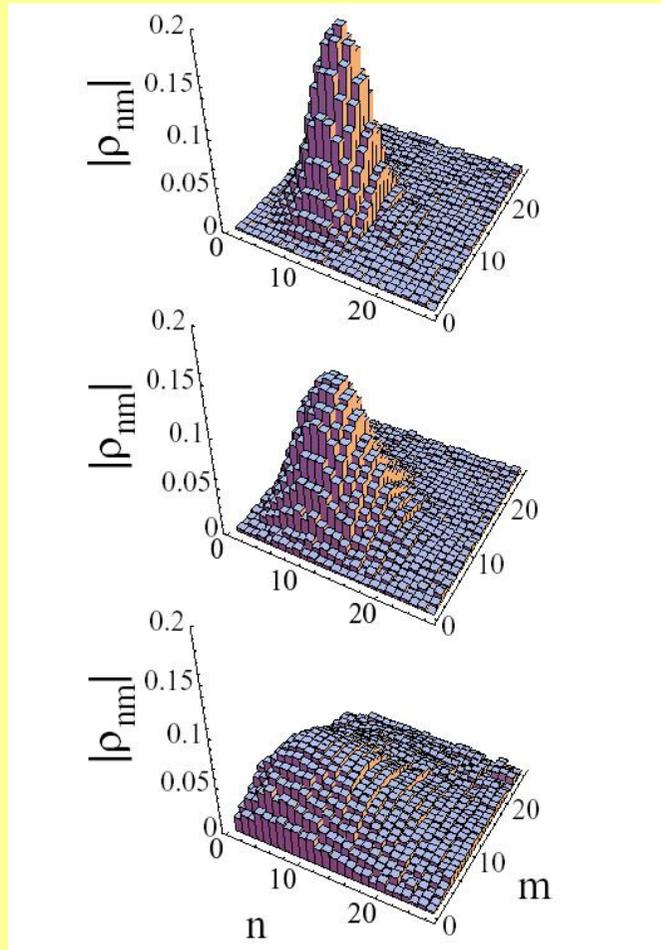
Lichtwellen-Experiment: Homodyn-System

Details



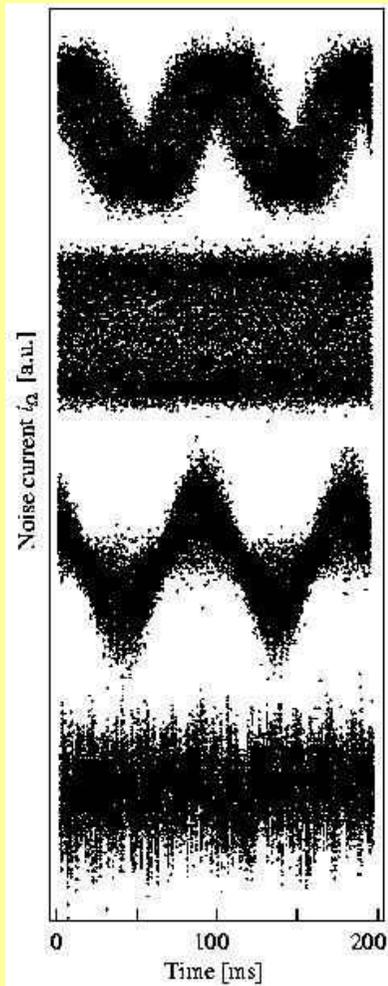
Lichtwellen-Experiment:

Dichteoperatoren und Photonenstatistik I



Lichtwellen-Experiment:

Dichteoperatoren und Photonenstatistik II

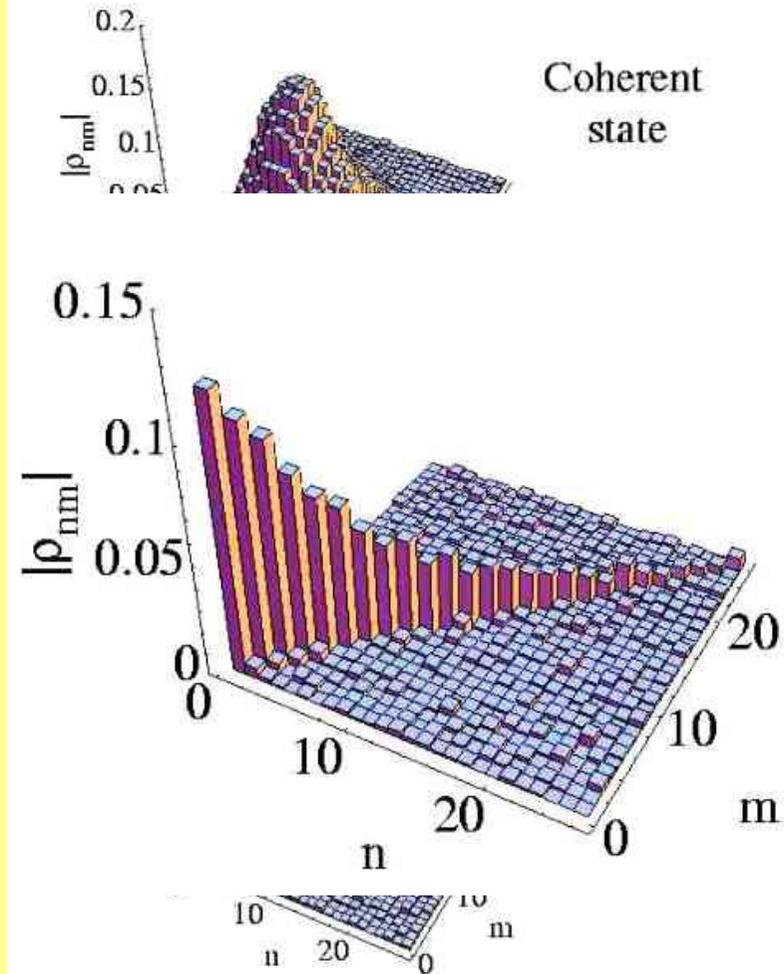


partially phase-diffused

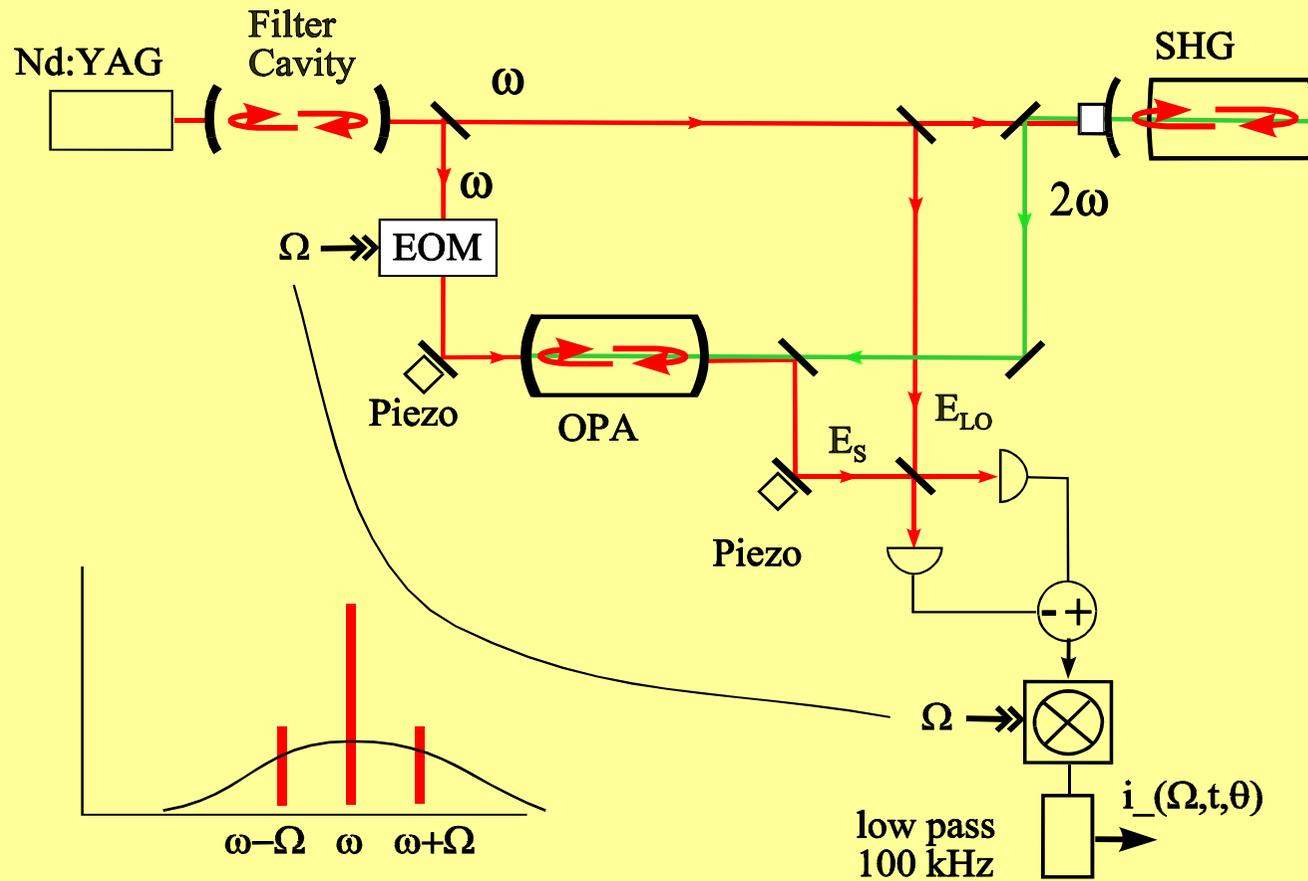
completely phase-diffused

amplitude-diffused

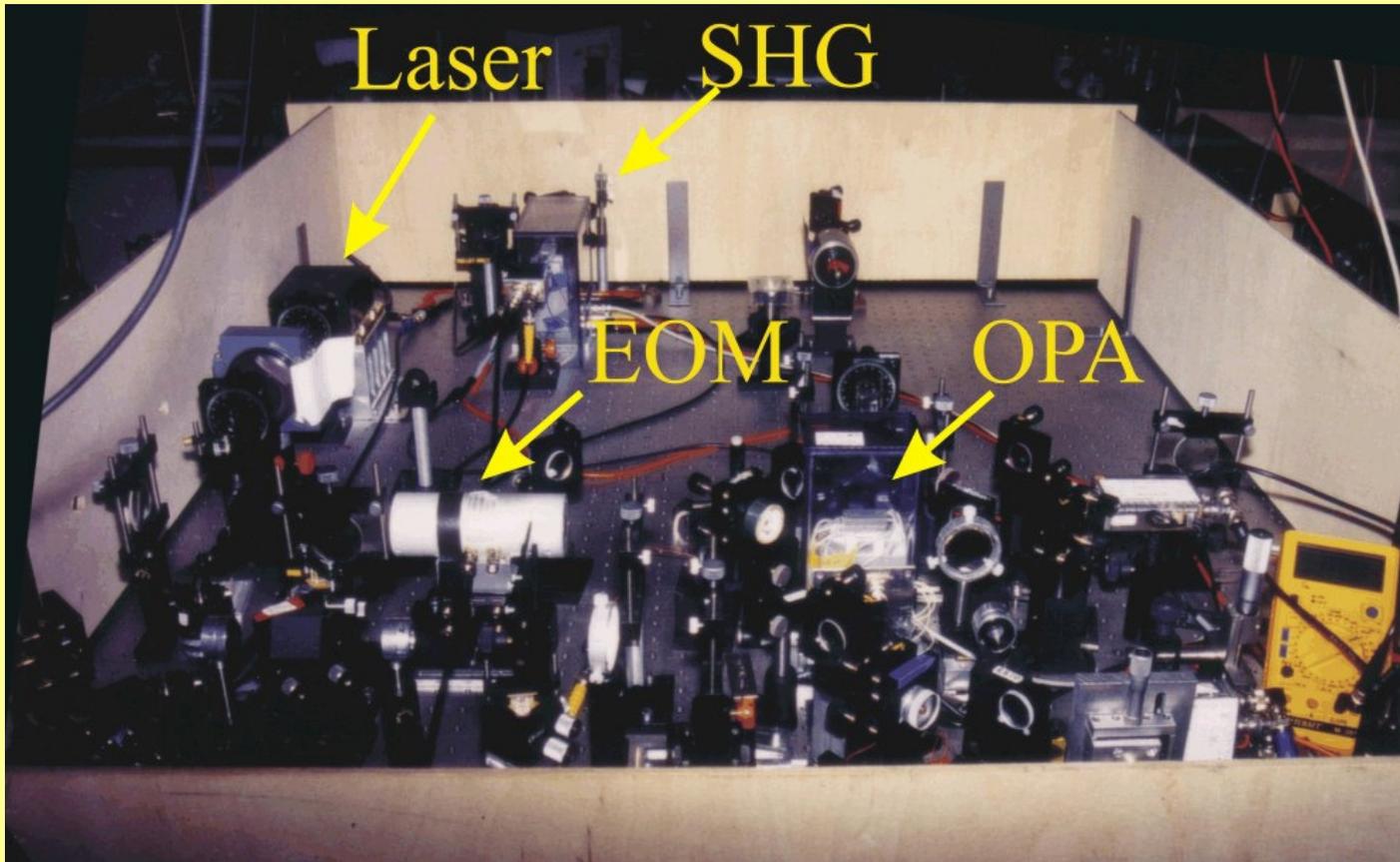
thermal state



Lichtwellen-Experiment Setup



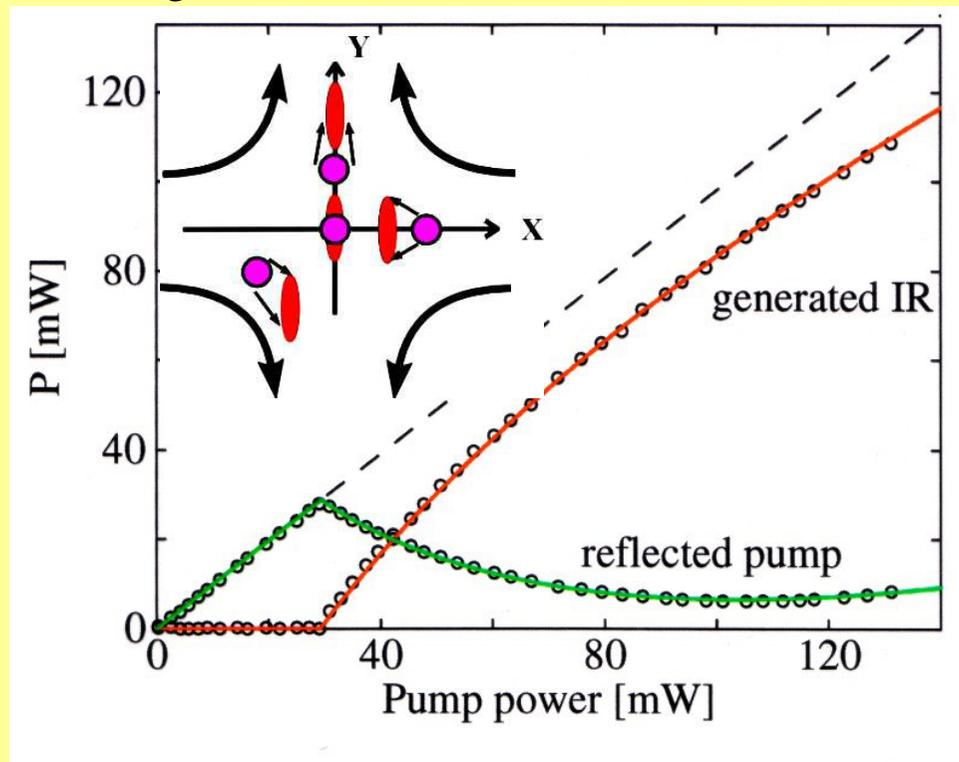
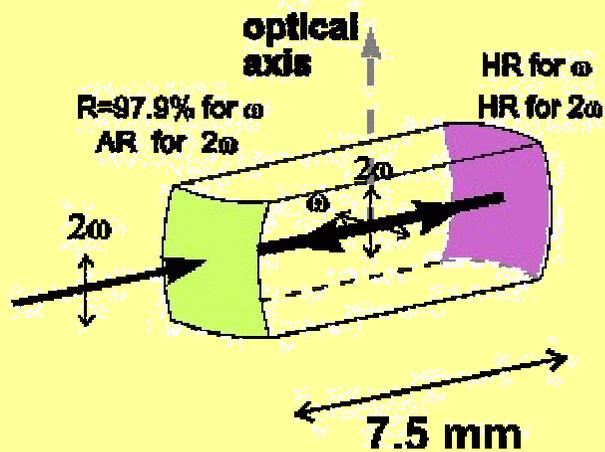
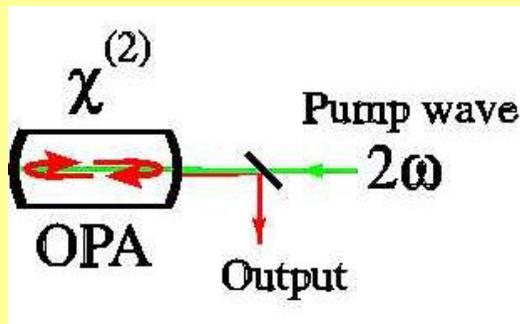
Lichtwellen-Experiment: Labor



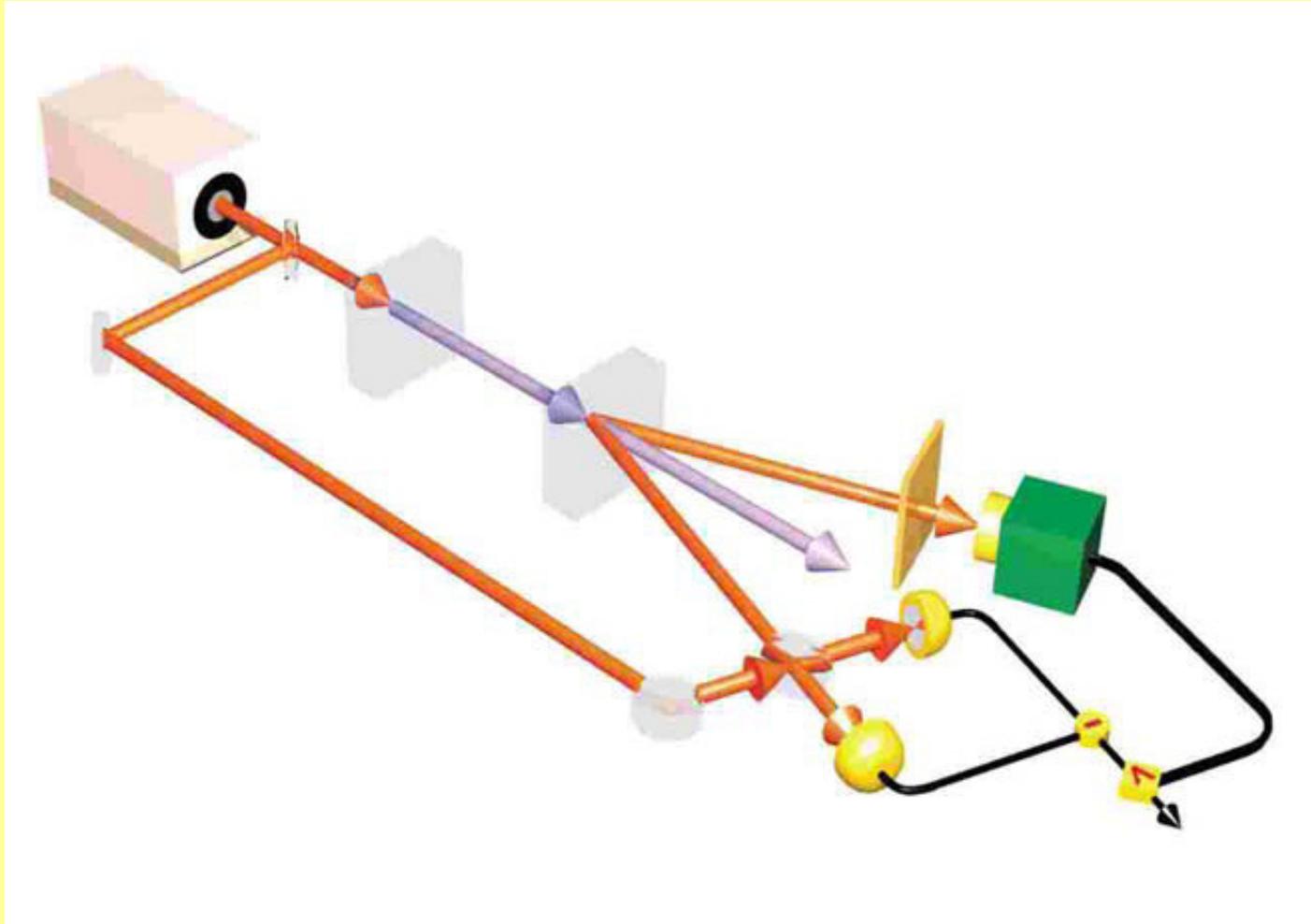
Lichtwellen-Experiment:

Präparation der Lichtwelle durch nichtlineare Medien

Hocheffiziente resonante Frequenzkonversion ($> 80\%$)
532 nm \Rightarrow signal/idler um 1064 nm im cw-Bereich



Lichtwellen-Experiment: Schema 1-Photon-Messung



Lichtwellen-Experiment: Die Realität

